

---

## Semantik von Programmiersprachen – SS 2019

<http://pp.ipd.kit.edu/lehre/SS2019/semantik>

---

### Blatt 1: Mathematische Grundlagen

Besprechung: 29.04.2019

---

#### 1. Äquivalenzrelationen und Ordnungen (H)

Eine **Relation**  $R$  zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist eine Teilmenge von  $A \times B$ , d.h., eine Menge von Paaren  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ . Statt  $(a, b) \in R$  schreibt man oft  $a R b$ .

Sei im Folgenden  $A = B$ .  $R$  ist

**reflexiv** falls für alle  $a \in A$  gilt:  $a R a$

**symmetrisch** falls für alle  $a, b \in A$  gilt: Wenn  $a R b$ , dann auch  $b R a$ .

**antisymmetrisch** falls für alle  $a, b \in A$  gilt: Wenn  $a R b$  und  $b R a$ , so gilt  $a = b$ .

**transitiv** falls für alle  $a, b, c \in A$  gilt: Wenn  $a R b$  und  $b R c$ , dann auch  $a R c$ .

**total** falls für alle  $a, b \in A$  gilt:  $a R b$  oder  $a = b$  oder  $b R a$ .

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist eine **Äquivalenzrelation**. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt **(Halb-)Ordnung**.

Sei  $A = \{a, b, c\}$ . Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Welche Ordnungsrelationen? Welche total? Begründen Sie Ihre Antwort!

- $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$
- $R_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$
- $R_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$

#### 2. Induktive Definitionen (H)

Ein Beispiel: *Natürliche Zahlen*. Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  lässt sich als Teilmenge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  wie folgt definieren:

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Wenn  $n$  eine natürliche Zahl ist, so ist auch  $n + 1$  eine natürliche Zahl.
- Nichts anderes soll eine natürliche Zahl sein.

Solch eine Definition lässt sich kürzer mit Regeln schreiben:

$$0 \in \mathbb{N} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{n + 1 \in \mathbb{N}}$$

Bedingung (c) ist das Charakteristikum für induktive Definitionen und liefert ein Induktionsprinzip: Regelinduktion. Formal:

$$\frac{m \in \mathbb{N} \quad P(0) \quad \forall n. n \in \mathbb{N} \wedge P(n) \implies P(n + 1)}{P(m)}$$

Dies ist genau die Regel für Induktion über natürliche Zahlen: Um eine Aussage für eine beliebige natürliche Zahl zu zeigen, genügt es, sie für 0 zu zeigen, und für  $n + 1$  unter der Annahme, dass sie für  $n$  gilt.

Ein Beispielbeweis: Die Summe der ersten  $n$  Zahlen ist gleich  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Formal:  $P(n) \equiv \left( \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \right)$

- Induktionsanfang: Zu zeigen  $P(0)$ , d.h.,  $\sum_{i=0}^0 i = \frac{0(0+1)}{2}$  Beweis: Ausrechnen!
- Induktionsschritt: Zu zeigen:  $\forall n. n \in \mathbb{N} \wedge P(n) \implies P(n+1)$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig.

Induktionsannahme: Es gilt  $P(n)$ , d.h.  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Zu zeigen:  $P(n+1)$ , d.h.  $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ .

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i &= \left( \sum_{i=0}^n i \right) + (n+1) = (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \square \end{aligned}$$

Sei  $\rightarrow$  nun wieder eine Relation auf einer Menge  $A$ . Die reflexive, transitive Hülle  $\rightarrow^*$  von  $\rightarrow$  sei durch folgende Regeln definiert:

$$\text{REFL: } a \rightarrow^* a \qquad \text{STEP: } \frac{a \rightarrow^* b \quad b \rightarrow c}{a \rightarrow^* c}$$

- Bestimmen Sie für folgende Mengen die reflexive, transitive Hülle. Hierbei sei  $A = \{a, b, c, d\}$ .
  - $\rightarrow_1 = \{(a, b), (b, d), (c, d)\}$
  - $\rightarrow_2 = \{(a, b), (b, c), (d, a)\}$
  - $\rightarrow_3 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$
- Schreiben Sie die Induktionsregel für  $\rightarrow^*$  auf.
- Zeigen Sie, dass  $\rightarrow^*$  reflexiv ist.
- Zeigen Sie mittels Induktion, dass auch folgende Regel gilt:

$$\frac{x \rightarrow y \quad y \rightarrow^* z}{x \rightarrow^* z}$$

- Zeigen Sie, dass  $\rightarrow^*$  transitiv ist.
- Regelsysteme lassen sich direkt in Prolog-Prädikate übersetzen. Implementieren Sie entsprechend obiger Regeln ein Prolog-Prädikat `rtrancl(R,X,Y)`, das erfüllt ist, wenn  $X R^* Y$  für das Prolog-Prädikat  $R$  gilt.

### 3. Falsche Induktionsbeweise (H)

Finden Sie die Fehler in folgenden Induktionsbeweisen!

- Alle Pferde einer endlichen Menge  $M$  von Pferden haben die gleiche Farbe.  
Sei  $n$  die Anzahl der Pferde in  $M$ . Beweis durch Induktion über  $n$ .  
Induktionsanfang:  $n = 0$ . Dann ist  $M$  leer und die Aussage trivial. Induktionsschritt: Angenommen, für alle Pferdemenge  $M'$  der Größe  $n$  gilt die Aussage. Sei  $M$  eine Pferdemenge der Größe  $n + 1$ , also  $M = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ . Dann ist  $M_1 = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$

eine Pferdemenge der Größe  $n$ , somit haben  $p_0, \dots, p_{n-1}$  alle die gleiche Farbe. Wähle nun  $M_2 = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Dies ist wieder eine Pferdemenge der Größe  $n$ , somit haben auch  $p_1, \dots, p_n$  alle die gleiche Farbe. Damit hat  $p_0$  also die gleiche Farbe wie  $p_1$  und  $p_1$  die gleiche Farbe wie  $p_2$  bis  $p_n$ , somit haben alle Pferde aus  $M$  die gleiche Farbe.

- (b) Sei  $\rightarrow$  eine beliebige binäre Relation auf der Menge  $\{\text{grün, gelb, rot}\}$ . Dann gilt, dass in der transitiven Hülle von  $\rightarrow$  nur rot von rot aus erreichbar ist.

Formal: Für alle  $b$  gilt, wenn  $\text{rot} \rightarrow^* b$ , dann  $\text{rot} = b$ .

Beweis per (Regel-)Induktion über  $\text{rot} \rightarrow^* b$ :

- Fall REFL: Zu zeigen:  $\text{rot} = \text{rot}$ . Trivial.
- Fall STEP: Induktionsannahmen:  $\text{rot} \rightarrow^* b$ ,  $b \rightarrow c$  und  $b = \text{rot}$ .  
Zu zeigen:  $\text{rot} = b$ . Folgt aus der Annahme.