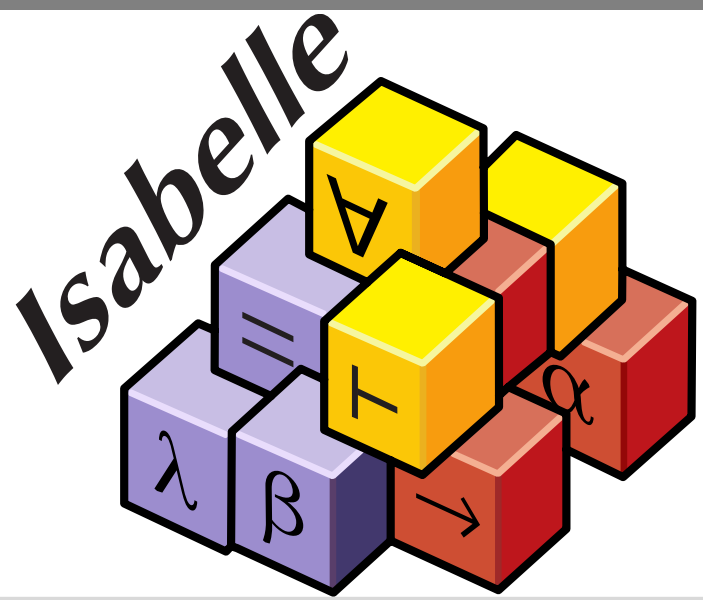
Karlsruher Institut für Technologie

# Theorembeweiserpraktikum

## Anwendungen in der Sprachtechnologie

LEHRSTUHL PROGRAMMIERPARADIGMEN



Karlsruher Institut für Technologie

# Teil IV

# *Quantoren in Isabelle/HOL*

# Quantoren in Isabelle/HOL

Die üblichen zwei Quantoren der Logik:

Existenzquantor: $\exists$ (geschrieben `\<exists>`, Kürzel `?`), Syntax: `∃x. P x`

Allquantor: $\forall$ (geschrieben `\<forall>`, Kürzel `!`), Syntax: `∀x. P x`

# Quantoren in Isabelle/HOL

Die üblichen zwei Quantoren der Logik:

Existenzquantor: $\exists$ (geschrieben `\<exists>`, Kürzel `?`), Syntax: `∃x. P x`

Allquantor: $\forall$ (geschrieben `\<forall>`, Kürzel `!`), Syntax: `∀x. P x`

Niedrigere Präzedenz als logische Operatoren, aber höhere als $\Longrightarrow$

# Quantoren in Isabelle/HOL

Die üblichen zwei Quantoren der Logik:

Existenzquantor: $\exists$ (geschrieben `\<exists>`, Kürzel `?`), Syntax: `∃x. P x`

Allquantor: $\forall$ (geschrieben `\<forall>`, Kürzel `!`), Syntax: `∀x. P x`

Niedrigere Präzedenz als logische Operatoren, aber höhere als $\Longrightarrow$

**Beispiele**

`∀x. P x ⟹ Q x` In Konklusion `x` nicht gebunden durch Allquantor

# Quantoren in Isabelle/HOL

Die üblichen zwei Quantoren der Logik:

Existenzquantor: $\exists$ (geschrieben `\<exists>`, Kürzel `?`), Syntax: $\exists x.\ P\ x$

Allquantor: $\forall$ (geschrieben `\<forall>`, Kürzel `!`), Syntax: $\forall x.\ P\ x$

Niedrigere Präzedenz als logische Operatoren, aber höhere als $\Longrightarrow$

## Beispiele

$\forall x.\ P\ x \Longrightarrow Q\ x$ In Konklusion $x$ nicht gebunden durch Allquantor

$\forall x.\ P\ x \Longrightarrow \exists x.\ Q\ x \Longrightarrow R$

Zwei verschiedene $x$ in den Annahmen

gleichbedeutend mit $\forall y.\ P\ y \Longrightarrow \exists z.\ Q\ z \Longrightarrow R$

(*gebundene Namen sind Schall und Rauch*)

# Quantoren in Isabelle/HOL

Die üblichen zwei Quantoren der Logik:

Existenzquantor: $\exists$ (geschrieben `\<exists>`, Kürzel `?`), Syntax: `∃x. P x`

Allquantor: $\forall$ (geschrieben `\<forall>`, Kürzel `!`), Syntax: `∀x. P x`

Niedrigere Präzedenz als logische Operatoren, aber höhere als $\Longrightarrow$

## Beispiele

`∀x. P x ⟹ Q x` In Konklusion `x` nicht gebunden durch Allquantor

`∀x. P x ⟹ ∃x. Q x ⟹ R`
Zwei verschiedene `x` in den Annahmen
gleichbedeutend mit `∀y. P y ⟹ ∃z. Q z ⟹ R`
(*gebundene Namen sind Schall und Rauch*)

`∀x. P x ⟶ Q x` *gleiches* `x` für `P` und `Q`

# Wie sagt man es Isabelle...?

Argumentation mit Quantoren erfordert Aussagen über *beliebige* Werte
Nur: Wie weiß Isabelle, dass ein Wert *beliebig* ist?

# Wie sagt man es Isabelle...?

Argumentation mit Quantoren erfordert Aussagen über *beliebige* Werte
Nur: Wie weiß Isabelle, dass ein Wert *beliebig* ist?

## Lösung: Meta-Logik

Syntax: $\bigwedge x.\ \ldots \Longrightarrow \ldots$

$\bigwedge$ heisst Meta-Allquantor, Variablen dahinter Parameter

Achtung: Niedrigere Präzedenz als $\Longrightarrow$

Beispiel: $\bigwedge x\ y.\ \forall y.\ P\ y \longrightarrow Q\ z\ y \Longrightarrow Q\ x\ y \Longrightarrow \exists x.\ Q\ x\ y$
entspricht

# Wie sagt man es Isabelle...?

Argumentation mit Quantoren erfordert Aussagen über *beliebige* Werte
Nur: Wie weiß Isabelle, dass ein Wert *beliebig* ist?

## Lösung: Meta-Logik

Syntax: $\bigwedge x.\ \ldots \Longrightarrow \ldots$

$\bigwedge$ heisst Meta-Allquantor, Variablen dahinter Parameter

Achtung: Niedrigere Präzedenz als $\Longrightarrow$

Beispiel: $\bigwedge x\ y.\ \forall y.\ P\ y \longrightarrow Q\ z\ y \Longrightarrow Q\ x\ y \Longrightarrow \exists x.\ Q\ x\ y$

entspricht $\bigwedge x\ y.\ \forall y_1.\ P\ y_1 \longrightarrow Q\ z\ y_1 \Longrightarrow Q\ x\ y \Longrightarrow \exists x_1.\ Q\ x_1\ y$

# Wie sagt man es Isabelle...?

Argumentation mit Quantoren erfordert Aussagen über *beliebige* Werte
Nur: Wie weiß Isabelle, dass ein Wert *beliebig* ist?

## Lösung: Meta-Logik

Syntax: $\bigwedge x.\ \ldots \Longrightarrow \ldots$

$\bigwedge$ heisst Meta-Allquantor, Variablen dahinter Parameter

Achtung: Niedrigere Präzedenz als $\Longrightarrow$

Beispiel: $\bigwedge x\ y.\ \forall y.\ P\ y \longrightarrow Q\ z\ y \Longrightarrow Q\ x\ y \Longrightarrow \exists x.\ Q\ x\ y$

entspricht $\bigwedge x\ y.\ \forall y_1.\ P\ y_1 \longrightarrow Q\ z\ y_1 \Longrightarrow Q\ x\ y \Longrightarrow \exists x_1.\ Q\ x_1\ y$

$\forall$ und $\longrightarrow$ sind nicht identisch mit $\bigwedge$ und $\Longrightarrow$, die ersten beiden nur in HOL!

# Wie sagt man es Isabelle...?

Argumentation mit Quantoren erfordert Aussagen über *beliebige* Werte
Nur: Wie weiß Isabelle, dass ein Wert *beliebig* ist?

**Lösung: Meta-Logik**

Syntax: $\bigwedge x.\ \ldots \Longrightarrow \ldots$
$\bigwedge$ heisst Meta-Allquantor, Variablen dahinter Parameter

Achtung: Niedrigere Präzedenz als $\Longrightarrow$

Beispiel: $\bigwedge x\ y.\ \forall y.\ P\ y \longrightarrow Q\ z\ y \Longrightarrow Q\ x\ y \Longrightarrow \exists x.\ Q\ x\ y$
entspricht $\bigwedge x\ y.\ \forall y_1.\ P\ y_1 \longrightarrow Q\ z\ y_1 \Longrightarrow Q\ x\ y \Longrightarrow \exists x_1.\ Q\ x_1\ y$

$\forall$ und $\longrightarrow$ sind nicht identisch mit $\bigwedge$ und $\Longrightarrow$, die ersten beiden nur in HOL!

Wir haben übrigens schon mit Meta-Allquantoren gearbeitet: Freie Variablen in Lemmas werden automatisch meta-allquantifiziert!

**lemma** `"A ∧ B ⟶ A ∨ B"`
**lemma** `"⋀A B. A ∧ B ⟶ A ∨ B"`

# RegeIn

Jeder Quantor hat Introduktions- und Eliminationsregel:

# RegeIn

Jeder Quantor hat Introduktions- und Eliminationsregel:

- `allI: (⋀x. P x) ⟹ ∀x. P x`
  Eine Aussage gilt für beliebige `x` (Meta-Ebene),
  also gilt sie auch für alle (HOL-Ebene)

# Regeln

Jeder Quantor hat Introduktions- und Eliminationsregel:

- `allI:` $(\bigwedge x.\ P\ x) \Longrightarrow \forall x.\ P\ x$
  Eine Aussage gilt für beliebige $x$ (Meta-Ebene),
  also gilt sie auch für alle (HOL-Ebene)
- `allE:` $\forall x.\ P\ x \Longrightarrow (P\ x \Longrightarrow R) \Longrightarrow R$
  Eine Aussage gilt für alle $x$, also folgt die Konklusion, wenn ich sie unter Verwendung der Aussage für einen (selbst wählbaren) Term zeigen kann

# Regeln

Jeder Quantor hat Introduktions- und Eliminationsregel:

- `allI: (⋀x. P x) ⟹ ∀x. P x`
  Eine Aussage gilt für beliebige `x` (Meta-Ebene),
  also gilt sie auch für alle (HOL-Ebene)
- `allE: ∀x. P x ⟹ (P x ⟹ R) ⟹ R`
  Eine Aussage gilt für alle `x`, also folgt die Konklusion, wenn ich sie unter Verwendung der Aussage für einen (selbst wählbaren) Term zeigen kann
- `exI: P x ⟹ ∃x. P x`
  Eine Aussage gilt für einen Term `x`, also gibt es ein `x`, wofür sie gilt

# Regeln

Jeder Quantor hat Introduktions- und Eliminationsregel:

- $allI: (\bigwedge x.\ P\ x) \Longrightarrow \forall x.\ P\ x$
  Eine Aussage gilt für beliebige $x$ (Meta-Ebene),
  also gilt sie auch für alle (HOL-Ebene)
- $allE: \forall x.\ P\ x \Longrightarrow (P\ x \Longrightarrow R) \Longrightarrow R$
  Eine Aussage gilt für alle $x$, also folgt die Konklusion, wenn ich sie unter Verwendung der Aussage für einen (selbst wählbaren) Term zeigen kann
- $exI: P\ x \Longrightarrow \exists x.\ P\ x$
  Eine Aussage gilt für einen Term $x$, also gibt es ein $x$, wofür sie gilt
- $exE: \exists x.\ P\ x \Longrightarrow (\bigwedge x.\ P\ x \Longrightarrow Q) \Longrightarrow Q$
  Eine Aussage gilt für ein $x$, also folgt die Konklusion, wenn ich sie unter Verwendung der Aussage für einen beliebigen, nicht weiter bestimmten Term zeigen kann

# Quantoren in Isar

Der Befehl **fix** korrespondiert mit $\bigwedge$.

```
have "∀x. P x"
proof (rule allI)
  fix x
  show "P x" ⟨Beweis⟩
qed

from ⟨∀x. P x⟩
have "Q (f x)"
proof (rule allE)
  assume "P (f x)"
  then show "Q (f x)" ⟨Beweis⟩
qed
```

```
have "∃x. P x"
proof (rule exI)
  show "P (f 0)" ⟨Beweis⟩
qed

from ⟨∃x. P x⟩
have "R"
proof (rule exE)
  fix x
  assume "P x"
  show "R" ⟨Beweis⟩
qed
```

Letzteres geht auch ohne neuen Scope:

```
from ⟨∃x. P x⟩
obtain x where "P x" by (rule exE)
```

Karlsruher Institut für Technologie

# Teil V

# *Fallunterscheidung*

# Fallunterscheidung

In (klassischen) Beweisen Fallunterscheidung wichtiges Hilfsmittel

$$\frac{\dfrac{P}{Q} \qquad \dfrac{\neg P}{Q}}{Q}$$

# Fallunterscheidung

In (klassischen) Beweisen Fallunterscheidung wichtiges Hilfsmittel

$$\frac{\dfrac{P}{Q} \qquad \dfrac{\neg P}{Q}}{Q}$$

In Isabelle: Mit der Regel `case_split: (P ⟹ Q) ⟹ (¬P ⟹ Q) ⟹ Q`

**Beispiel**:

```
have "BB ∨ ¬ BB"
proof (rule case_split)
  assume "BB"
  then show "BB ∨ ¬BB"..
next
  assume "¬ BB"
  then show "BB ∨ ¬BB"..
qed
```

Statt **proof** `(rule case_split)` geht auch **proof** `(cases "BB")`. Vorteil: Die Annahmen sind gleich die richtigen (sonst erfährt Isabelle erst beim ersten **show** was `P` sein sollte – das klappt ggf. nicht zuverlässig).

# Fallunterscheidung: Beispiel

Dieses Lemma wäre ohne Fallunterscheidung so nicht (einfach) lösbar!

```
lemma "B ∧ C ⟶ (A ∧ B) ∨ (¬ A ∧ C)"
proof
  assume "B ∧ C" then have "B"..
  from ⟨B ∧ C⟩   have "C"..

  show "(A ∧ B) ∨ (¬ A ∧ C)"
  proof (cases A)
    assume "A"
    from ⟨A⟩ ⟨B⟩ have "A ∧ B"..
    then show ?thesis..
  next
    assume "¬A"
    from ⟨¬A⟩ ⟨C⟩ have "¬A ∧ C"..
    then show ?thesis..
  qed
qed
```

Karlsruher Institut für Technologie

# Teil VI

# *Definition*

# definition

Ermöglicht, einen Term zu benennen, so darüber zu abstrahieren und die Abstraktion gezielt zu öffnen

# definition

Ermöglicht, einen Term zu benennen, so darüber zu abstrahieren und die Abstraktion gezielt zu öffnen

## Beispiel:

```
definition answer :: "nat"
 where "answer = 42"
```

# definition

Ermöglicht, einen Term zu benennen, so darüber zu abstrahieren und die Abstraktion gezielt zu öffnen

## Beispiel:

```
definition answer :: "nat"
 where "answer = 42"
```

Erzeugt Regel: `answer_def: answer = 42`

# definition

Ermöglicht, einen Term zu benennen, so darüber zu abstrahieren und die Abstraktion gezielt zu öffnen

## Beispiel:

```
definition answer :: "nat"
 where "answer = 42"
```

Erzeugt Regel: `answer_def: answer = 42`

So können auch Funktionen definiert werden:

## Beispiel:

```
definition nand :: "bool ⇒ bool ⇒ bool"
 where "nand A B = (¬ (A ∧ B))"
```

Erzeugt Regel: `nand_def: nand A B = (¬ (A ∧ B))`

# definition – Syntaxdefinition

`nand` ist binärer Operator
$\Longrightarrow$ Infixoperator bietet sich an

# definition – Syntaxdefinition

`nand` ist binärer Operator
$\Longrightarrow$ Infixoperator bietet sich an

## Syntaxdefinition (Infix-Notation)

Schreibe `(`**infixl** *`"Operatorsymbol"`* `n)` an die Deklarationszeile, wobei

- **infixl** für linksgebundenen Infixoperator steht,
  **infixr** für rechtsgebundene
- *`Operatorsymbol`* ein beliebig wählbares Symbol für den Operator ist,
- *n* eine Zahl ist, welche die Präzedenz dieses Operators angibt

# definition – Syntaxdefinition

`nand` ist binärer Operator
$\Longrightarrow$ Infixoperator bietet sich an

## Syntaxdefinition (Infix-Notation)

Schreibe *(***infixl** *"Operatorsymbol" n)* an die Deklarationszeile, wobei

- **infixl** für linksgebundenen Infixoperator steht,
  **infixr** für rechtsgebundene
- *Operatorsymbol* ein beliebig wählbares Symbol für den Operator ist,
- *n* eine Zahl ist, welche die Präzedenz dieses Operators angibt

## Beispiel: Operator `nand`

**definition** *nand :: "bool ⇒ bool ⇒ bool"* ***(infixl*** *"⋈" 36)*
**where** *"A ⋈ B = (¬ (A ∧ B))"*

Jetzt: *A ⋈ B ⋈ C* gleichbedeutend mit *nand (nand A B) C*

# Teil VII

# *Gleichungen*

# Gleichungen

Das Arbeiten mit Gleichungen ist eine sehr wichtige Beweistechnik. Die Hauptregel dabei ist die Substitution:

$$\frac{s = t \qquad P[s/x]}{P[t/x]}$$

Diese Regel gibt es auch in Isabelle:

```
subst: s = t ⟹ P s ⟹ P t
```

# Gleichungen

Das Arbeiten mit Gleichungen ist eine sehr wichtige Beweistechnik. Die Hauptregel dabei ist die Substitution:

$$\frac{s = t \qquad P[s/x]}{P[t/x]}$$

Diese Regel gibt es auch in Isabelle:

```
subst: s = t ⟹ P s ⟹ P t
```

**Beispiel:**

```
assume "correct answer"
with answer_def
have "correct 42" by (rule subst)
```

Auch nützlich:

```
ssubst: s = t ⟹ P t ⟹ P s
arg_cong: x = y ⟹ f x = f y
```

# Transitivität

Gleichheit ist transitiv, auch in Isabelle:

*trans:* $r = s \Longrightarrow s = t \Longrightarrow r = t$

Aber umständlich:

**lemma** *"foo = qux"*
**proof** *(rule trans)*
  **show** *"foo = bar"* ⟨*Beweis 1*⟩
**next**
  **show** *"bar = qux"*
  **proof** *(rule trans)*
    **show** *"bar = baz"* ⟨*Beweis 2*⟩
  **next**
    **show** *"baz = qux"* ⟨*Beweis 3*⟩
  **qed**
**qed**

# Transitivität

Gleichheit ist transitiv, auch in Isabelle:

*trans:* $r = s \Longrightarrow s = t \Longrightarrow r = t$

Aber umständlich:

```
lemma "foo = qux"
proof (rule trans)
  show "foo = bar" ⟨Beweis 1⟩
next
  show "bar = qux"
  proof (rule trans)
    show "bar = baz" ⟨Beweis 2⟩
  next
    show "baz = qux" ⟨Beweis 3⟩
  qed
qed
```

Besser mit **also** und **finally**:

```
lemma "foo = qux"
proof -
  have "foo = bar" ⟨Beweis 1⟩
  also
  have "bar = baz" ⟨Beweis 2⟩
  also
  have "baz = qux" ⟨Beweis 3⟩
  finally show "foo = qux".
qed
```

# Gleichungsketten

Aber oft **proof** *(rule trans)* zu schreiben wäre sehr umständlich.
Statt dessen: Gleichungsketten!

- Die Befehle **also** und **finally** sollten jeweils einer Aussage (**assume** oder **have**) folgen, die eine Gleichung ist.
- Das abschließende **finally** kombiniert die Aussagen per Transitivität und stellt das Ergebnis (wie **from**) bereit.
- Die Abkürzung *?thesis* steht für die Konklusion des aktuell zu beweisende Lemmas (vor Anwendung von Regeln!).
  Typisches Muster:
  **proof** -
  ⟨...⟩
  **finally show** *?thesis*.
  **qed**
- In Ausdrücken steht ... für die rechte Seite der letzten Aussage.
- Ist ein Lemma *foo* falsch herum, kann man *foo[symmetric]* verwenden.

# Gleichungsketten (Beispiel)

```
lemma "(A ∧ (A ∨ B)) = A"
proof -
  from conj_disj_distribL
  have "(A ∧ (A ∨ B)) = ((A ∧ A) ∨ (A ∧ B))".
  also
  from conj_absorb
  have "((A ∧ A) ∨ (A ∧ B)) = (A ∨ (A ∧ B))" by (rule arg_cong)
  also
  have "(A ∨ (A ∧ B)) = A"
  proof
    ⟨a nested proof⟩
  qed
  finally
  show "(A ∧ (A ∨ B)) = A".
qed
```

# Gleichungsketten (Beispiel mit Abkürzungen)

```
lemma "(A ∧ (A ∨ B)) = A"
proof -
  from conj_disj_distribL
  have "(A ∧ (A ∨ B)) = ((A ∧ A) ∨ (A ∧ B))".
  also
  from conj_absorb
  have "... = (A ∨ (A ∧ B))" by (rule arg_cong)
  also
  have "... = A"
  proof
    ⟨a nested proof⟩
  qed
  finally
  show ?thesis.
qed
```

# Randbemerkung: moreover und ultimately

Die **also**..**finally**-Struktur hat einen kleinen Bruder: **moreover**..**ultimately**. Hier werden die Aussagen nicht per Transitivität verbunden, sondern einfach gesammelt.

# Randbemerkung: moreover und ultimately

Die **also**..**finally**-Struktur hat einen kleinen Bruder: **moreover**..**ultimately**. Hier werden die Aussagen nicht per Transitivität verbunden, sondern einfach gesammelt.

Damit können Verschachtelungen vermieden werden, die Beweise natürlicher aufgebaut und Wiederholungen in **from**-Befehlen verringert werden:

**have** `"A ∧ B"`
**proof**
  **show** `A`
    ⟨*Beweis A*⟩
**next**
  **show** `B`
    ⟨*Beweis B*⟩
**qed**

**have** `A`
  ⟨*Beweis A*⟩
**moreover**
**have** `B`
  ⟨*Beweis B*⟩
**ultimately**
  **have** `"A ∧ B"`**..**