



Theorembeweiserpraktikum – SS 2016

<http://pp.ipd.kit.edu/lehre/SS2016/tba>

Blatt 1: Deduktion

Abgabe: 25. April 2016
Besprechung: 26. April 2016

1 Natürliches Schließen

In dieser Aufgabe geht es um den Kalkül des natürlichen Schließens, mit dessen Hilfe einige Lemmas der Aussagen-Logik bewiesen werden sollen (nächste Seite).

Für die Beweise gelten die folgenden Spielregeln:

- Es dürfen nur die Befehle **proof**, **assume**, **have**, **show**, **next**, **qed**, und **from** verwendet werden, sowie darauf aufbauende Abkürzungen wie **then**, **with**, **..** und **..**.
- Der Befehl **proof** darf nur als **proof** (*rule regel*) verwendet werden, wobei die Regel eine der folgenden ist: (Anzeigen der Lemmas mittel **thm lemma-Name**)

$impI: (A \implies B) \implies A \longrightarrow B,$ $impE: A \longrightarrow B \implies A \implies (B \implies C) \implies C,$
 $conjI: A \implies B \implies A \wedge B,$ $conjE: A \wedge B \implies (A \implies B \implies C) \implies C,$
 $disjI1: A \implies A \vee B,$ $disjE:$
 $disjI2: B \implies A \vee B,$ $A \vee B \implies (A \implies C) \implies (B \implies C) \implies C,$
 $notI: (A \implies False) \implies \neg A,$ $notE: \neg A \implies A \implies B,$
 $iffI: (A \implies B) \implies (B \implies A) \implies A \longleftrightarrow B,$
 $iffE: A \longleftrightarrow B \implies (A \longrightarrow B \implies B \longrightarrow A \implies C) \implies C,$
 $ccontr: (\neg A \implies False) \implies A$
 $classical: (\neg A \implies A) \implies A$

Alle diese Regeln, außer den letzten beiden, sind als Standard-Regeln vorgegeben, das heißt der Befehl **proof** (*rule*) (oder kurz **proof**) wählt die passende Regel aus, auch ohne dass man sie explizit angibt. Lassen Sie nur Namen von Regeln weg, die sie zuvor zumindest einmal explizit verwendet haben.

Beispiel

lemma *imp_uncurry*: " $(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)) \longrightarrow P \wedge Q \longrightarrow R$ "

proof(*rule impI*)

assume *PQR*: " $P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$ "

show " $P \wedge Q \longrightarrow R$ "

proof — Das (*rule impI*) kann weglassen werden

assume " $P \wedge Q$ "

then have " P " **by**(*rule conjE*)

with *PQR*

have " $Q \longrightarrow R$ " **by**(*rule impE*)

from $\langle P \wedge Q \rangle$
have "Q".. — Hier steht eigentlich *by(rule conjE)*
with $\langle Q \longrightarrow R \rangle$
show R..

qed

qed

lemma I: " $A \longrightarrow A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $A \wedge B \longrightarrow B \wedge A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $A \wedge B \longrightarrow A \vee B$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $((A \vee B) \vee C) \longrightarrow A \vee (B \vee C)$ "

$\langle solution \rangle$

lemma K: " $A \longrightarrow B \longrightarrow A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $A \vee A \longleftrightarrow A \wedge A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma S: " $(A \longrightarrow B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow B) \longrightarrow A \longrightarrow C$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (B \longrightarrow C) \longrightarrow A \longrightarrow C$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $\neg \neg A \longrightarrow A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $A \longrightarrow \neg \neg A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $(\neg A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow A)$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $((A \longrightarrow B) \longrightarrow A) \longrightarrow A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma " $A \vee \neg A$ "

$\langle solution \rangle$

lemma deMorgan1: " $\neg (A \vee B) \longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ "

$\langle solution \rangle$

lemma deMorgan2: " $\neg (A \wedge B) \longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$ "

$\langle solution \rangle$

Anmerkung: Ist Ihnen bei den Beweisen der De Morgan-Regeln etwas aufgefallen?