Karlsruher Institut für Technologie

Lehrstuhl für Programmierparadigmen

Joachim Breitner
breitner@kit.edu

Denis Lohner
denis.lohner@kit.edu

Semantik von Programmiersprachen – SS 2015

http://pp.ipd.kit.edu/lehre/SS2015/semantik

Blatt 10: Fixpunkttheorie

Besprechung: 15.06.2015

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (H)

(a) Für $f(\sigma) = \sigma[\mathtt{i} \mapsto 1]$ und $g(\sigma) = \sigma[\mathtt{i} \mapsto 2]$ gilt $f \sqsubseteq g$.

(b) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}_0^+ = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\}$ hat bezüglich der normalen Ordnung $\leq$ auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ein kleinstes Element.

(c) Jede Teilmenge einer total geordneten Menge ist eine Kette.

(d) In einer ccpo $(D, \sqsubseteq)$ hat jede Menge $M \subseteq D$ eine obere Schranke.

(e) Die Menge $\mathfrak{P}^{fin}(\mathbb{N})$ der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist mit der Teilmengenrelation $\subseteq$ als Ordnung eine ccpo.

(f) Jede ccpo $(D, \sqsubseteq)$ hat ein kleinstes Element.

(g) Das abgeschlossene Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist eine ccpo mit $\leq$ als Ordnung.

(h) $\mathrm{IF}\,(p,\ f,\ g)$ ist strikt in f.

(i) Wenn $f \circ g$ kettenstetig ist, dann sind auch f und g kettenstetig.

2. Monotonie und Fixpunkte (H)

Finden Sie eine Halbordnung $(D, \sqsubseteq)$ mit kleinstem Element $\bot$ und eine monotone Funktion $f :: D \Rightarrow D$, die mehrere Fixpunkte besitzt, aber keinen kleinsten.

3. `repeat c until b`-Schleife (Ü)

In einer früheren Aufgabe haben wir schon die operationale Semantik einer `repeat`-Schleife betrachtet. Com wird dazu um das Syntaxkonstrukt $\mathtt{repeat}\ c\ \mathtt{until}\ b$ erweitert und die operationale Big-Step-Semantik durch die Regeln

$$\textsc{RepeatTT}\text{:}\ \frac{\langle c,\ \sigma\rangle \Downarrow \sigma' \qquad \mathcal{B}\,[\![b]\!]\,\sigma' = \mathbf{tt}}{\langle \mathtt{repeat}\ c\ \mathtt{until}\ b,\ \sigma\rangle \Downarrow \sigma'}$$

$$\textsc{RepeatFF}\text{:}\ \frac{\langle c,\ \sigma\rangle \Downarrow \sigma' \qquad \mathcal{B}\,[\![b]\!]\,\sigma' = \mathbf{ff} \qquad \langle \mathtt{repeat}\ c\ \mathtt{until}\ b,\ \sigma'\rangle \Downarrow \sigma''}{\langle \mathtt{repeat}\ c\ \mathtt{until}\ b,\ \sigma\rangle \Downarrow \sigma''}$$

(a) Leiten Sie daraus die Rekursionsgleichung für $\mathcal{D}\,[\![\mathtt{repeat}\ c\ \mathtt{until}\ b]\!]$ her.

(b) Erweitern Sie die Definition von $\mathcal{D}\,[\![\_]\!]$ um $\mathtt{repeat}\ c\ \mathtt{until}\ b$.

(c) Prüfen Sie, ob die Semantik mit Ihrer Erweiterung weiterhin wohldefiniert und kompositional ist.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{D}\,[\![\mathtt{repeat}\ c\ \mathtt{until}\ b]\!] = \mathcal{D}\,[\![c;\ \mathtt{while}\ (\mathtt{not}\ b)\ \mathtt{do}\ c]\!]$