Karlsruher Institut für Technologie

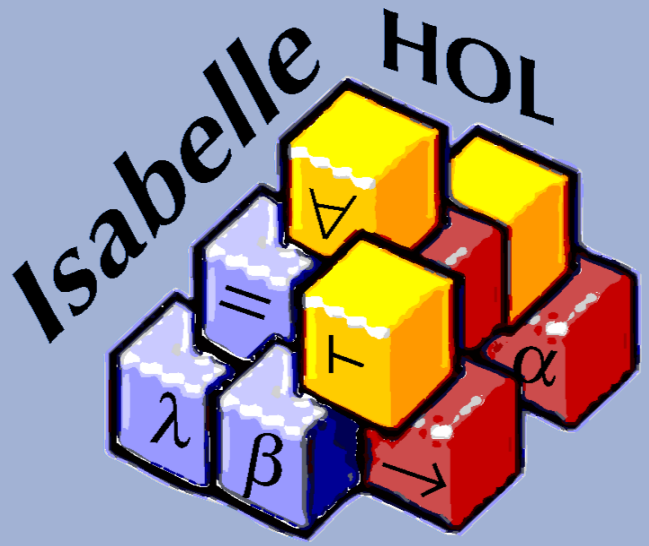
# Theorembeweiserpraktikum

## Anwendungen in der Sprachtechnologie

**http://pp.info.uni-karlsruhe.de/lehre/SS2010/tba/**

**Daniel Wasserrab**

IPD Snelting, Lehrstuhl Programmierparadigmen



# Teil VIII

# Allgemeine Rekursion

# Allgemeine Rekursion

oftmals ist primitive Rekursion mit einer Regel pro Konstruktor zu einschränkend
manche rekursiven Definitionen haben z.B. zwei Basisfälle oder brauchen Rekursion in mehr als einem Parameter

# Allgemeine Rekursion

oftmals ist primitive Rekursion mit einer Regel pro Konstruktor zu einschränkend
manche rekursiven Definitionen haben z.B. zwei Basisfälle oder brauchen Rekursion in mehr als einem Parameter

Beispiel: Fibonacci-Zahlen
mit **primrec** (auf einfache Weise) nicht möglich!

# fun

Lösung: **fun**!
ermöglicht “mächtigere” Rekursion, so z.B. mehrere Basisfälle oder Rekursion in mehreren Parametern
Syntax: analog zu **primrec**

# fun

Lösung: **fun**!
ermöglicht “mächtigere” Rekursion, so z.B. mehrere Basisfälle oder Rekursion in mehreren Parametern
Syntax: analog zu **primrec**

Beispiel “mehrere Basisfälle”: Fibonacci-Zahlen

```
fun fib :: "nat ⇒ nat"
  where "fib 0 = 1"
  | "fib (Suc 0) = 1"
  | "fib (Suc (Suc n)) = fib n + fib (Suc n)"
```

# fun

Lösung: **fun**!
ermöglicht “mächtigere” Rekursion, so z.B. mehrere Basisfälle oder Rekursion in mehreren Parametern
Syntax: analog zu **primrec**

Beispiel “mehrere Basisfälle”: Fibonacci-Zahlen

```
fun fib :: "nat ⇒ nat"
  where "fib 0 = 1"
  | "fib (Suc 0) = 1"
  | "fib (Suc (Suc n)) = fib n + fib (Suc n)"
```

Beispiel “Rekursion in mehreren Parametern”: Zippen von Listen

```
fun zip :: "'a list ⇒ 'b list ⇒ ('a × 'b) list"
  where "zip [] [] = []"
  | "zip (a#as) (b#bs) = (a,b)#zip as bs"
```

# fun

**fun** definiert Funktionen durch Pattern Matching
“lineare Patterns”: unterschiedliche Variablen auf den linken Seiten

# fun

**fun** definiert Funktionen durch Pattern Matching
“lineare Patterns”: unterschiedliche Variablen auf den linken Seiten

möglich: Überlappen von Patterns
dann Reihenfolge bestimmend
es wird immer die erste passende Regel angewandt
damit möglich: default-Regel, die alle restlichen Fälle beinhaltet

# fun

**fun** definiert Funktionen durch Pattern Matching
“lineare Patterns”: unterschiedliche Variablen auf den linken Seiten

möglich: Überlappen von Patterns
dann Reihenfolge bestimmend
es wird immer die erste passende Regel angewandt
damit möglich: default-Regel, die alle restlichen Fälle beinhaltet

Beispiel: zwischen je zwei Elemente einer Liste Seperatorzeichen einfügen

```
fun sep :: "'a => 'a list ⇒ 'a list"
where "sep a (x#y#zs) = x#a#sep a (y#zs)"
  |"sep a xs          = xs"
```

# Simplifikationsregeln

In **fun** definierte Regeln landen im Simplifier, können auch direkt mit *`Funktionsname.simps`* angesprochen werden

# Simplifikationsregeln

In **fun** definierte Regeln landen im Simplifier, können auch direkt mit *Funktionsname.simps* angesprochen werden

Beispiel: *fib.simps*:

```
fib 0 = 1
fib (Suc 0) = 1
fib (Suc (Suc ?n)) = fib ?n + fib (Suc ?n)
```

# Simplifikationsregeln

In **fun** definierte Regeln landen im Simplifier, können auch direkt mit *Funktionsname.simps* angesprochen werden

Beispiel: *fib.simps*:

```
fib 0 = 1
fib (Suc 0) = 1
fib (Suc (Suc ?n)) = fib ?n + fib (Suc ?n)
```

Beispiel: *sep.simps*:

```
sep ?a (?x # ?y # ?zs) = ?x # ?a # sep ?a (?y # ?zs)
sep ?a [] = []
sep ?a [?v] = [?v]
```

Beachte: Defaultregel (sep a xs = xs) generiert **zwei** Regeln, damit Pattern Matching vollständig

# Induktionsregeln

analog definiert **fun** auch für jede Funktion eine Induktionsregel

*`Funktionsname.induct`*

Verwendung im Induktionsbeweis:

**apply**`(`*`induct Funktionsparameter rule:Funktionsname.induct`*`)`

Das nennt man *Regelinduktion*

# Induktionsregeln

analog definiert **fun** auch für jede Funktion eine Induktionsregel
*Funktionsname.induct*
Verwendung im Induktionsbeweis:
**apply** *(induct Funktionsparameter rule:Funktionsname.induct)*
Das nennt man *Regelinduktion*

Beispiel: *sep.induct*

$$[\![\bigwedge a\ x\ y\ zs.\ ?P\ a\ (y\ \#\ zs) \Longrightarrow ?P\ a\ (x\ \#\ y\ \#\ zs);\ \bigwedge a.\ ?P\ a\ [];\ \bigwedge a\ v.\ ?P\ a\ [v]]\!] \Longrightarrow ?P\ ?a0.0\ ?a1.0$$

# Induktionsregeln

analog definiert **fun** auch für jede Funktion eine Induktionsregel
*Funktionsname.induct*
Verwendung im Induktionsbeweis:
**apply** *(induct Funktionsparameter rule:Funktionsname.induct)*
Das nennt man *Regelinduktion*

Beispiel: *sep.induct*

```
⟦⋀a x y zs. ?P a (y # zs) ⟹ ?P a (x # y # zs); ⋀a. ?P a []; ⋀a v. ?P a [v]⟧ ⟹ ?P ?a0.0 ?a1.0
```

**lemma** *"map f (sep x ys) = sep (f x) (map f ys)"*
**apply** *(induct x ys rule:sep.induct)* generiert folgende 3 subgoals:

```
1. ⋀a x y zs. map f (sep a (y # zs)) = sep (f a) (map f (y # zs)) ⟹
     map f (sep a (x # y # zs)) = sep (f a) (map f (x # y # zs))
2. ⋀a. map f (sep a []) = sep (f a) (map f [])
3. ⋀a v. map f (sep a [v]) = sep (f a) (map f [v])
```

# Ausblick

**fun** hat **primrec** weitestgehend ersetzt, nur in Randfällen noch Arbeit mit **primrec**

auch mit **fun** kann es Probleme geben, z.B. bei wechselseitiger Rekursion oder falls **fun** Termination nicht selbst sicherstellen kann
Lösung: **function**! Braucht jedoch selbstgeschriebenen Vollständigkeits- und Terminationsbeweis...

# Ausblick

**fun** hat **primrec** weitestgehend ersetzt, nur in Randfällen noch Arbeit mit **primrec**

auch mit **fun** kann es Probleme geben, z.B. bei wechselseitiger Rekursion oder falls **fun** Termination nicht selbst sicherstellen kann
Lösung: **function**! Braucht jedoch selbstgeschriebenen Vollständigkeits- und Terminationsbeweis...

mehr dazu: **function**-Tutorial
`http://isabelle.in.tum.de/dist/Isabelle/doc/functions.pdf`

# Teil IX

# Kombination von Regeln

# Variablen in Regeln spezifizieren mittels `of`

Manchmal nötig, dass Variablen vor Regelanwendung festgelegt (z.B. Isabelle kann passende Terme nicht inferieren), dann:

- eckige Klammer hinter Regelnamen
- Schlüsselwort `of`, danach einer oder mehrere Terme
- müssen natürlich zu Typ der Variable passen
- Reihenfolge wie erstes Auftreten in Regel
- _ für Variablen, die man nicht instantiieren möchte

# Variablen in Regeln spezifizieren mittels `of`

Manchmal nötig, dass Variablen vor Regelanwendung festgelegt (z.B. Isabelle kann passende Terme nicht inferieren), dann:

- eckige Klammer hinter Regelnamen
- Schlüsselwort `of`, danach einer oder mehrere Terme
- müssen natürlich zu Typ der Variable passen
- Reihenfolge wie erstes Auftreten in Regel
- _ für Variablen, die man nicht instantiieren möchte

Beispiel:

| | |
|---|---|
| `iffE:` | $[\![?P = ?Q;\ [\![?P \longrightarrow ?Q;\ ?Q \longrightarrow ?P]\!] \Longrightarrow ?R]\!] \Longrightarrow ?R$ |
| `iffE[of X]:` | $[\![X = ?Q;\ [\![X \longrightarrow ?Q;\ ?Q \longrightarrow X]\!] \Longrightarrow ?R]\!] \Longrightarrow ?R$ |
| `iffE[of _ Y]:` | $[\![?P = Y;\ [\![?P \longrightarrow Y;\ Y \longrightarrow ?P]\!] \Longrightarrow ?R]\!] \Longrightarrow ?R$ |
| `iffE[of X Y Z]:` | $[\![X = Y;\ [\![X \longrightarrow Y;\ Y \longrightarrow X]\!] \Longrightarrow Z]\!] \Longrightarrow Z$ |

# Prämissen in Regeln spezifizieren mittels `OF`

Analog: Ganze Prämissen instantiieren

- ebenso eckige Klammer,
- Schlüsselwort `OF`, danach Regelname
- Konklusion der Regel und entspr. Prämisse müssen unifizieren
- entspr. Prämisse mit Prämissen der eingefügten Regel ersetzt
- bei mehreren `OF`s: erst linkeste Prämisse, dann die rechts davon usw.
- auch hier _ für Überspringen von Prämissen
- vor allem bei Induktionshypothesen einsetzbar

# Prämissen in Regeln spezifizieren mittels *OF*

Analog: Ganze Prämissen instantiieren

- ebenso eckige Klammer,
- Schlüsselwort *OF*, danach Regelname
- Konklusion der Regel und entspr. Prämisse müssen unifizieren
- entspr. Prämisse mit Prämissen der eingefügten Regel ersetzt
- bei mehreren *OF*s: erst linkeste Prämisse, dann die rechts davon usw.
- auch hier _ für Überspringen von Prämissen
- vor allem bei Induktionshypothesen einsetzbar

Beispiel:

| | |
|---|---|
| *conjI:* | $[\![?P;\ ?Q]\!] \Longrightarrow ?P \wedge ?Q$ |
| *ccontr:* | $(\neg\ ?P \Longrightarrow False) \Longrightarrow ?P$ |
| *conjI[OF ccontr]:* | $[\![\neg\ ?P \Longrightarrow False;\ ?Q]\!] \Longrightarrow ?P \wedge ?Q$ |
| *conjI[OF ccontr,of X]:* | $[\![\neg\ X \Longrightarrow False;\ ?Q]\!] \Longrightarrow X \wedge ?Q$ |

# Regeln kombinieren mittels *THEN*

statt zwei Regel nacheinander auszuführen, Kombination dieser Regeln

- Konklusion der ersten passt auf eine Prämisse der zweiten Regel
- Variablen entsprechend zweiter Regel unifiziert
- erster Regelname gefolgt von eckiger Klammer
- dann Schlüsselwort *THEN* gefolgt von zweitem Regelnamen
- gut einsetzbar, falls Isabelle bei Substitution scheitert

# Regeln kombinieren mittels *THEN*

statt zwei Regel nacheinander auszuführen, Kombination dieser Regeln

- Konklusion der ersten passt auf eine Prämisse der zweiten Regel
- Variablen entsprechend zweiter Regel unifiziert
- erster Regelname gefolgt von eckiger Klammer
- dann Schlüsselwort *THEN* gefolgt von zweitem Regelnamen
- gut einsetzbar, falls Isabelle bei Substitution scheitert

Beispiel:

```
iffI:                                  ⟦?P ⟹ ?Q; ?Q ⟹ ?P⟧ ⟹ ?P = ?Q
sym:                                   ?s = ?t ⟹ ?t = ?s
mp:                                    ⟦?P ⟶ ?Q; ?P⟧ ⟹ ?Q
iffI[THEN sym]:                        ⟦?s ⟹ ?t; ?t ⟹ ?s⟧ ⟹ ?t = ?s
iffI[THEN sym,of P Q]:                 ⟦P ⟹ Q; Q ⟹ P⟧ ⟹ Q = P
iffI[THEN sym,OF mp,of P R Q]:
                        ⟦P ⟹ R ⟶ Q; P ⟹ R; Q ⟹ P⟧ ⟹ Q = P
```