

Übersicht: Regeln und Beweise

1 Regeln

Es gibt verschiedene Methoden, die auf einzelnen Regeln arbeiten. Wir betrachten für den allgemeinen Fall eine beliebige Regel:

$$\llbracket P_1; \dots; P_n \rrbracket \Longrightarrow Q$$

Wir bezeichnen im Folgenden P_1 als Hauptprämisse (nur für Eliminations- und Destruktionsregeln) und nennen obige Regel **R**. Dann gilt für die Basisregelmethode:

- Methode **rule R** unifiziert Q mit dem aktuellen Subgoal und ersetzt dieses durch n neue Subgoals: Instanzen von P_1, \dots, P_n . Dies wird *Rückwartsschließen* genannt und ist für Introduktionsregeln geeignet. Beispiel:

aktuelles Beweisziel: 1. $\llbracket A; B \rrbracket \Longrightarrow B \wedge A$

nach **apply(rule conjI)** (= " $\llbracket ?X; ?Y \rrbracket \Longrightarrow ?X \wedge ?Y$ ") neue Subgoals:

1. $\llbracket A; B \rrbracket \Longrightarrow B$

2. $\llbracket A; B \rrbracket \Longrightarrow A$

- Methode **erule R** unifiziert Q mit dem aktuellen Subgoal und gleichzeitig P_1 mit einer Annahme. Das Subgoal wird durch die $n - 1$ neuen Subgoals der Beweisinstanzen von P_2, \dots, P_n ersetzt, wobei die passende Annahme gelöscht wird. Auch dies ist *Rückwartsschließen* und ist für Eliminationsregeln geeignet. Beispiel:

aktuelles Beweisziel: 1. $\llbracket A \longrightarrow B \longrightarrow C; A; B \rrbracket \Longrightarrow C$

nach **apply(erule impE)** (= " $\llbracket ?X \longrightarrow ?Y; ?X; ?Y \Longrightarrow ?Z \rrbracket \Longrightarrow ?Z$ ")

neue Subgoals:

1. $\llbracket A; B \rrbracket \Longrightarrow A$

2. $\llbracket A; B; B \longrightarrow C \rrbracket \Longrightarrow C$

- Methode **drule R** unifiziert P_1 mit einer Annahme, welche sie dann auch löscht. Das Subgoal wird durch $n - 1$ neue Subgoals des Beweises für P_2, \dots, P_n ersetzt; ein n tes Subgoal entspricht dem ursprünglichen, besitzt jedoch eine zusätzliche Annahme: eine Instanz von Q . Dies wird *Vorwärtsschließen* genannt und ist für Destruktionsregeln geeignet. Beispiel:

aktuelles Beweisziel: 1. $\llbracket A; B; B \longrightarrow C \rrbracket \Longrightarrow C$

nach **drule mp** (= " $\llbracket ?X \longrightarrow ?Y; ?X \rrbracket \Longrightarrow ?Y$ ") neue Subgoals:

1. $\llbracket A; B \rrbracket \Longrightarrow B$

2. $\llbracket A; B; C \rrbracket \Longrightarrow C$

- Methode `frule` R entspricht `drule` R außer dass die passende Annahme nicht gelöscht wird. Beispiel: wie oben bei `drule`, nur wäre in beiden erhaltenen Subgoals weiterhin die Implikation vorhanden

Es kann vorkommen, dass zwei Annahmen auf die Anwendung einer Eliminations- oder Destruktionsregel passen. Dann wird von den Methoden `erule` bzw. `drule` die jeweils erste passende Annahme gewählt, auch wenn dies evtl. die falsche ist. Mittels `apply(rotate_tac n)` kann man jedoch die Annahmen zyklisch um n Schritte rotieren lassen (von rechts nach links, wenn $n > 0$, ansonsten umgekehrt), bis die gewünschte Annahme an erster Stelle steht und damit von den Methoden ausgewählt wird.

Wenn in einer Regel freie Variablen vorkommen, kann man diese während der Anwendung der Regel auch festlegen. Dies geschieht nach folgendem Muster: `rule_tac v1 = t1 and ... and vk = tk in R`, wenn $?v_1, \dots, ?v_k$ freie Variablen in der anzuwendenden Regel R (nicht im aktuellen Subgoal!) sind. Analog gibt es `erule_tac`, `drule_tac` und `frule_tac`. Beispiel:

aktuelles Beweisziel: 1. $P y \implies \exists x. P x$

nach `apply(rule_tac x = "y" in exI)` (`exI = "P ?x $\implies \exists x. P x$ "`)

neues Subgoal:

1. $P y \implies P y$

Man unterscheidet zwischen *sicheren* und *unsicheren* Regeln. *Sicher* heißt, es gibt keinerlei Informationsverlust, die Beweisbarkeit bleibt erhalten. Bei der Anwendung von *unsicheren* Regeln jedoch kann die Beweisbarkeit verlorengehen, weil Information verloren geht. Beispiel: $A \implies A \vee B$. Wenn man jetzt hier die falsche Introduktionsregel `disjI2` anwendet, erhält man $A \implies B$ und man kann die Aussage nicht mehr beweisen.

Sichere Regeln sind: `conjI`, `impI`, `notI`, `iffI`, `classical`, `conjE`, `disjE`, `exE`, `allI`. Unsicher dagegen sind `disjI1`, `disjI2`, `impE`, `notE`, `exI`, `allE`.

2 Beweise

Es gibt mehrere Arten von Beweisen. In der Deduktion am wichtigsten sind jedoch folgende:

Rückwärtsschließen: Hier ist der Ausgangspunkt die Konklusion. Diese wird solange vereinfacht (mit `rule` und `erule` Regeln), bis man sie mit den Annahmen unifizieren kann. Vorteil: sicher, keine Sackgassen, Nachteil: kann sehr aufwändig sein

Vorwärtsschließen: Hier beginnt das Argumentieren bei den Annahmen. Diese werden (durch `drule` und `frule` Regeln) solange verändert, bis sie mit der Konklusion übereinstimmen. Vorteil: oft schneller, Nachteil: kann durch Elimination von wichtigen Aussagen in Sackgassen führen

Man kann natürlich in einem längeren Beweis beide Ansätze kombinieren und sich "in der Mitte treffen".