Universität Karlsruhe (TH)

Lehrstuhl für Programmierparadigmen

Sprachtechnologie und Compiler II SS 2009 — http://pp.info.uni-karlsruhe.de/

Dozent: Prof. Dr.-Ing. G. Snelting — snelting@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Übungsleiter: Matthias Braun — braun@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Lösung zu Übungsblatt 1 — Ausgabe: 21.4.2009 — Besprechung: 28.4.2009

Aufgabe 1: *Eigenschaften von Verbänden*

Hinweis: Sie können folgende Eigenschaft als gegeben betrachten:

$$\forall a, b, c \in M : a \sqsubseteq b \quad \Rightarrow \quad (a \sqcup c) \sqsubseteq (b \sqcup c) \ \land \ (a \sqcap c) \sqsubseteq (b \sqcap c) \tag{1}$$

1.1 *Rechenregeln*

Beweisen sie die aus der Vorlesung bekannten Rechenregeln:

a) $x \sqcup x = x$

Lösung:
Definition von Supremum: $x \sqcup x : (\forall a \in M : x \sqsubseteq a \land x \sqsubseteq a \implies x \sqcup x \sqsubseteq a)$
Mit $a := x$ gilt somit auch $x \sqsubseteq x \land x \sqsubseteq x \implies x \sqcup x \sqsubseteq x$
Zudem gilt $x \sqsubseteq x \sqcup x$
Wegen Antisymmetrie folgt $x \sqcup x = x$

b) $x \sqcup y = y \sqcup x$

Lösung:
Definition von Supremum: $x \sqcup y : (\forall a \in M : x \sqsubseteq a \land y \sqsubseteq a \implies x \sqcup y \sqsubseteq a)$
Sei nun $a := y \sqcup x$ so gilt $(x \sqsubseteq y \sqcup x \land y \sqsubseteq y \sqcup x \implies x \sqcup y \sqsubseteq y \sqcup x)$
$\implies x \sqcup y \sqsubseteq y \sqcup x$

Analog folgt aus der Definition von $y \sqcup x$: $y \sqcup x \sqsubseteq x \sqcup y$

Wegen Antisymmetrie gilt somit $x \sqcup y = y \sqcup x$

c) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$

Lösung:
Schritt 1 - Beweise $x \sqcup (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z$:

Definition von Supremum: $x \sqcup (y \sqcup z) : (\forall a \in M : x \sqsubseteq a \land (y \sqcup z) \sqsubseteq a \implies x \sqcup (y \sqcup z) \sqsubseteq a)$
Sei nun $a := (x \sqcup y) \sqcup z$ so gilt $(x \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z \land (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z \implies x \sqcup (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z)$

Da $y \sqsubseteq (x \sqcup y)$ folgt aus (1): $(y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z$
Damit hat man $(\mathit{true} \land x \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z \implies x \sqcup (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z)$

Aus $x \subseteq (x \sqcup y)$ und $(x \sqcup y) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z$ folgt wegen Transitivität: $x \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z$

Daraus folgt $(\mathit{true} \implies x \sqcup (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z)$
$\iff x \sqcup (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcup z)$

Schritt 2 - Beweise $x \sqcup (y \sqcup z) \sqsupseteq (x \sqcup y) \sqcup z$: Analog

d) $x \sqcap x = x$

Lösung:
Definition von Infimum: $x \sqcap x : (\forall a \in M : a \sqsubseteq x \land a \sqsubseteq x \implies a \sqsubseteq x \sqcap x)$
Mit $a := x$ gilt somit auch $x \sqsubseteq x \land x \sqsubseteq x \implies x \sqsubseteq x \sqcap x$
Zudem gilt $x \sqcap x \sqsubseteq x$
Wegen Antisymmetrie folgt $x \sqcap x = x$

e) $x \sqcap y = y \sqcap x$

Lösung:
Definition von Infimum: $x \sqcap y : (\forall a \in M : a \sqsubseteq x \wedge a \sqsubseteq y \implies a \sqsubseteq x \sqcap y)$
Sei nun $a := y \sqcap x$ so gilt $(y \sqcap x \sqsubseteq x \wedge y \sqcap x \sqsubseteq y \implies y \sqcap x \sqsubseteq x \sqcap y)$
$\implies y \sqcap x \sqsubseteq x \sqcap y$

Analog folgt aus der Definition von $y \sqcap x$: $x \sqcap y \sqsubseteq y \sqcap x$

Wegen Antisymmetrie gilt somit $x \sqcap y = y \sqcup x$

f) $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

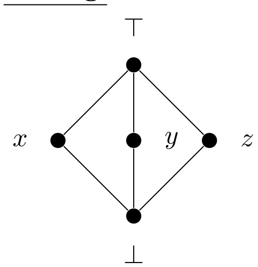
Lösung:
analog (benutze dualen Verband)

1.2 *Distributivität*

Verbände sind im allgemeinen nicht distributiv. Zeigen Sie welche der folgenden Aussagen immer gelten oder finden Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel.

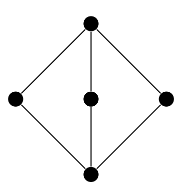
a) $x \sqcap (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

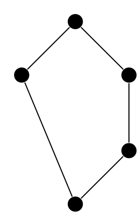
Lösung:



$x \sqcap (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$
$= x \sqcap \top \sqsubseteq \bot \sqcup \bot = x \sqsubseteq \bot$

Allgemeiner Hinweis: Ein Verband ist immer genau dann nicht distributiv, wenn er einen Unterverband enthält welcher isomorph zu einem der beiden folgenden Verbände ist:





b) $x \sqcap (y \sqcup z) \sqsupseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

Lösung:
Es gilt $y \sqsubseteq y \sqcup z$
Somit folgt aus (1) mit $a := y, b := (y \sqcup z), c := x$:
$y \sqcup x \sqsubseteq (y \sqcup z) \sqcup x \;\wedge\; y \sqcap x \sqsubseteq (y \sqcup z) \sqcap x$
$\implies y \sqcap x \sqsubseteq (y \sqcup z) \sqcap x$
Wegen Kommutativität gilt $y \sqcap x = x \sqcap y$ und $(y \sqcup z) \sqcap x = x \sqcap (y \sqcup z)$
Somit gilt auch $x \sqcap y \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z)$

Analog folgt $x \sqcap z \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z)$

Per Definition des Supremums gilt
$(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) : (\forall a \in M : (x \sqcap y) \sqsubseteq a \wedge (x \sqcap z) \sqsubseteq a \implies (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \sqsubseteq a)$
Mit $a := x \sqcap (y \sqcup z)$ folgt
$((x \sqcap y) \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z) \;\wedge\; (x \sqcap z) \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z) \implies (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z))$
$\iff (\mathit{true} \implies (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z))$
$\iff (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \sqsubseteq x \sqcap (y \sqcup z)$

c) $x \sqcup (y \sqcap z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Lösung:
Analog zu $x \sqcap (y \sqcup z) \sqsupseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$.

d) $x \sqcup (y \sqcap z) \sqsupseteq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Lösung:
Siehe Beispiel aus $x \sqcap (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$.

Aufgabe 2: *Infimum und Supremum*

Gegeben sei eine Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ zusammen mit der Relation $\sqsubseteq: M \times M$. Weiterhin gelte $a \sqsubseteq e$, $a \sqsubseteq f$, $b \sqsubseteq f$, $c \sqsubseteq e$, $c \sqsubseteq g$, $d \sqsubseteq i$, $e \sqsubseteq h$, $f \sqsubseteq h$, $f \sqsubseteq i$, $g \sqsubseteq i$, $g \sqsubseteq j$.

2.1 *Halbordnung*

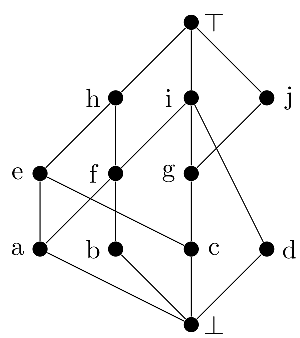
- Wenn $\sqsubseteq$ eine Halbordnung auf M ist, welche anderen Beziehungen in $\sqsubseteq$ müssen mindestens zusätzlich gelten? (Welche Paare müssen in Relation zueinander stehen)

  Lösung:

  - **reflexiv**: $\{m \sqsubseteq m \mid m \in M\} = a \sqsubseteq a$, $b \sqsubseteq b$, ..., $j \sqsubseteq j$
  - **transitiv**: $(a \sqsubseteq e \wedge e \sqsubseteq h \implies a \sqsubseteq h)$, $(a \sqsubseteq f \wedge f \sqsubseteq h \implies a \sqsubseteq h)$, $(a \sqsubseteq f \wedge f \sqsubseteq i \implies a \sqsubseteq i)$, $(b \sqsubseteq f \wedge f \sqsubseteq h \implies b \sqsubseteq h)$, $(b \sqsubseteq f \wedge f \sqsubseteq i \implies b \sqsubseteq i)$, $(c \sqsubseteq e \wedge e \sqsubseteq h \implies c \sqsubseteq h)$, $(c \sqsubseteq g \wedge g \sqsubseteq i \implies c \sqsubseteq i)$, $(c \sqsubseteq g \wedge g \sqsubseteq j \implies c \sqsubseteq j)$

- Fügen Sie nun noch $\{\top, \bot\}$ mit ihren bekannten Bedeutungen als grösstes und kleinstes Element der Menge M hinzu. Zeichnen Sie anschliessend das zugehörige Hasse-Diagram für die Halbordnung. Ist diese Halbordnung auch ein Verband? Begründen Sie.

  Lösung:



2.2 *Bestimmung von Supremum und Infimum*

Bestimmen Sie nun folgende Elemente sofern sie existieren oder erklären Sie warum sie nicht existieren können.

a) $h \sqcap i$	b) $(a \sqcup b) \sqcup c$	c) $a \sqcup (c \sqcup d)$	d) $a \sqcup c$	e) $a \sqcup (b \sqcup c)$
f) $(a \sqcup c) \sqcup d$	g) $h \sqcap j$	h) $c \sqcup d$	i) $\bigsqcup\{a, c, d\}$	

Lösung:

a) $\nexists : h \sqcap i = f \vee c$	b) $\nexists : f \sqcup c = h \vee i$	c) $a \sqcup i = i$	d) $\nexists : a \sqcup c = e \vee i$	e) $\nexists : b \sqcup c = h \vee i$
f) $\nexists : a \sqcup c = e \vee i$	g) c	h) i	i) i	

Aufgabe 3: *Produkt und Summe von Verbänden*

Eine Menge von Verbänden endlicher Höhe V_i kann zu einem neuen Verband kombiniert werden.

Als Produkt der einzelnen Verbände, wobei $\sqcup$, $\sqcap$ komponentenweise berechnet werden.

$$V_1 \times ... \times V_n \quad = \quad \{(x_1, .., x_n) \mid x_i \in V_i\}$$

Als Summe der Verbände. wobei $(i, x) \sqsubseteq (j, y) \iff i = j \wedge x \sqsubseteq y$ gilt.

$$V_1 + ... + V_n \quad = \quad \{(i, x_i) \mid x_i \in V_i \setminus \{\top, \bot\}\} \cup \{\top, \bot\}$$

3.1 *Höhe des Produkts*

Zeigen oder widerlegen Sie, dass für die Höhe des Produkts folgende Aussage gilt:

Höhe($V_1 \times ... \times V_n$) = Höhe($V_1$) + .. + Höhe($V_n$)

Lösung:
Allgemein gilt: $(a_1, .., a_k) \sqsubseteq (b_1, .., b_k) \iff a_1 \sqsubseteq b_1 \wedge ... \wedge a_k \sqsubseteq b_k$

$n = 1$:
Höhe(V_1) = Höhe(V_1)

$n \to n + 1$:
Sei $V^n = V_1 \times ... \times V_n$ so gilt: Höhe(V^n) = Höhe(V_1) + .. + Höhe(V_n) = h^*
Zu zeigen ist Höhe($V^n \times V_{n+1}$) = Höhe(V^n) + Höhe(V_{n+1}) = $h^* + h_{n+1}$
Aus Höhe(V^n) = h^* folgt: $\exists v_1, ..., v_{h^*} \in V^n : \forall i \in [1..(h^* - 1)] : v_i \sqsubseteq v_{i+1} \wedge v_i \neq v_{i+1}$
Aus Höhe(V_{n+1}) = h_{n+1} folgt: $\exists w_1, ..., w_{h_{n+1}} \in V_{n+1} : \forall i \in [1..(h_{n+1} - 1)] : w_i \sqsubseteq w_{i+1} \wedge w_i \neq w_{i+1}$
(Notation: Sei $x = (x_1, .., x_n)$ dann ist $x|y = (x_1, .., x_n, y)$)
So gilt nun $v_1|w_1 \sqsubseteq v_2|w_1 \sqsubseteq ... \sqsubseteq v_{h^*}|w_1 \sqsubseteq v_{h^*}|w_2 \sqsubseteq ... \sqsubseteq v_{h^*}|w_{h_{n+1}}$
$\implies$ Ein Pfad der Länge $h^* + h_{n+1}$ existiert in $V^n \times V_{n+1}$

Zu zeigen: Es gibt keinen Pfad der länger ist.
Sei $x_1, .., x_k$ nun ein Pfad mit $k > h^* + h_{n+1} \implies \exists l > 0 : k = h^* + h_{n+1} + l$
$\forall x_i \in x_1..x_{k-1} : x_i \sqsubseteq x_{i+1}$
Wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$ mit $x_i = (a_1, .., a_{n+1})$ und $x_{i+1} = (b_1, .., b_{n+1})$ so gilt
$\exists i \in [1..n + 1] : a_i \sqsubseteq b_i$
Da Höhe(V^n) = h^* existieren maximal h^* Elemente mit $i \in [1..n]$ und $a_i \sqsubseteq b_i$
$\implies$ Es gibt $k - h^*$ Elemente mit $i = n + 1$ für die gilt $a_{n+1} \sqsubseteq b_{n+1}$
$\implies$ Höhe(V_{n+1}) $\geq k - h^* = h^* + h_{n+1} + l - h^* = h_{n+1} + l$ mit $l > 0$
$\implies$ Widerspruch $\implies$ Annahme ist falsch $\implies$ Es gibt keinen Pfad mit $k > h^* + h_{n+1}$

3.2 *Höhe der Summe*

Zeigen oder widerlegen Sie, dass für die Höhe der Summe folgende Aussage gilt:

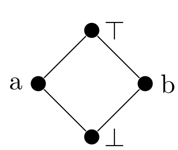
Höhe($V_1 + ... + V_n$) = max(Höhe(V_1), .. , Höhe(V_n))

Lösung:
Für $V = V_1 + .. + V_n$ gilt $\forall (i, x), (j, y) \in V : (i, x) \sqsubseteq (j, y) \iff i = j \wedge x \sqsubseteq y$ mit $x \in V_i$ und $y \in V_j$.
$\implies$ Es können nur Ketten aus Elementen mit identischen Indizes $i = j$ gebildet werden. Andere Elemente sind unvergleichbar.
$\implies$ Eine Kette in V besteht nur aus Elementen (i, x_k) mit $x_k \in V_i$
$\implies$ Jede Kette in V hat eine zugehörige Kette in V_i
$\implies$ Höhe($V_1 + ... + V_n$) = max(Höhe(V_1), .. , Höhe(V_n))

Aufgabe 4: *Fixpunkte*

4.1 *Ungewöhnliche Fixpunkte*

a) Bestimmen Sie einen Verband $(L, \sqsubseteq)$ und eine Funktion $f : L \to L$, die mehrere Fixpunkte, aber keinen kleinsten Fixpunkt, besitzt.
Lösung:



Sei $f : V \to V$ mit $f(\top) = \bot$, $f(\bot) = \top$, $f(a) = a$, $f(b) = b$ (Bem.: f ist nicht monoton).

b) Bestimmen Sie einen Verband $(L, \sqsubseteq)$ und eine monotone Funktion $f : L \to L$, die einen kleinsten Fixpunkt l besitzt, so dass aber $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} f^n(\bot) \neq l$.
Lösung:

Sei der nicht endliche Verband $(\mathbb{N}^\infty, \leq)$ mit der Funktion $f(x) = x + 1$. f ist monoton mit ∞ als kleinsten Fixpunkt. $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} f^n(\perp) \neq \infty$, da er durch Iteration nie erreicht werden kann.

4.2 *Gleichungssysteme für Ungleichungen*

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Fixpunkte zur Berechnung der kleinsten Lösung von bestimmten Gleichungssystemen verwendet werden können. Das funktioniert auch für Ungleichungen.

Sei V ein Verband endlicher Höhe, x_i Variablen und $f_i : V^n \to V$ monotone Funktionen. So lässt sich ein System von Ungleichungen in ein System von äquivalenten Gleichungen umformen.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \sqsubseteq & f_1(x_1, .., x_n) \\ & ... & \\ x_n & \sqsubseteq & f_n(x_1, .., x_n) \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_1 \sqcap f_1(x_1, .., x_n) \\ & ... & \\ x_n & = & x_n \sqcap f_n(x_1, .., x_n) \end{array}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Gültigkeit dieser Äquivalenz.

Lösung:
Es reicht zu zeigen: $x \sqsubseteq y \iff x = x \sqcap y$

$\Longrightarrow$: Es gilt $x \sqsubseteq y$
Definition von Infimum: $x \sqcap y : (\forall a \in M : a \sqsubseteq x \wedge a \sqsubseteq y \implies a \sqsubseteq x \sqcap y)$
Sei nun $a := x$ so gilt $x \sqsubseteq x \wedge x \sqsubseteq y \implies x \sqsubseteq x \sqcap y$
$\iff$ *true* $\implies x \sqsubseteq x \sqcap y$
$\iff x \sqsubseteq x \sqcap y$
Zusammen mit $x \sqcap y \sqsubseteq x$ folgt $x = x \sqcap y$

$\Longleftarrow$: Es gilt $x = x \sqcap y$
Weiterhin gilt $x \sqcap y \sqsubseteq x \wedge x \sqcap y \sqsubseteq y$
Daraus folgt unmittelbar $x \sqsubseteq y$