Universität Karlsruhe (TH)

Lehrstuhl für Programmierparadigmen

Sprachtechnologie und Compiler II SS 2009 — http://pp.info.uni-karlsruhe.de/

Dozent: Prof. Dr.-Ing. G. Snelting — snelting@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Übungsleiter: Matthias Braun — braun@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt 1 Ausgabe: 21.4.2009 Besprechung: 28.4.2009

Aufgabe 1: *Eigenschaften von Verbänden*

Hinweis: Sie können folgende Eigenschaft als gegeben betrachten:

$$\forall a, b, c \in M : a \sqsubseteq b \quad \Rightarrow \quad (a \sqcup c) \sqsubseteq (b \sqcup c) \;\wedge\; (a \sqcap c) \sqsubseteq (b \sqcap c) \tag{1}$$

1.1 *Rechenregeln*

Beweisen sie die aus der Vorlesung bekannten Rechenregeln:

a) $x \sqcup x = x$

b) $x \sqcup y = y \sqcup x$

c) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$

d) $x \sqcap x = x$

e) $x \sqcap y = y \sqcap x$

f) $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

1.2 *Distributivität*

Verbände sind im allgemeinen nicht distributiv. Zeigen Sie welche der folgenden Aussagen immer gelten oder finden Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel.

a) $x \sqcap (y \sqcup z) \sqsubseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

b) $x \sqcap (y \sqcup z) \sqsupseteq (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

c) $x \sqcup (y \sqcap z) \sqsubseteq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

d) $x \sqcup (y \sqcap z) \sqsupseteq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Aufgabe 2: *Infimum und Supremum*

Gegeben sei eine Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ zusammen mit der Relation $\sqsubseteq$: $M \times M$. Weiterhin gelte $a \sqsubseteq e$, $a \sqsubseteq f$, $b \sqsubseteq f$, $c \sqsubseteq e$, $c \sqsubseteq g$, $d \sqsubseteq i$, $e \sqsubseteq h$, $f \sqsubseteq h$, $f \sqsubseteq i$, $g \sqsubseteq i$, $g \sqsubseteq j$.

2.1 *Halbordnung*

- Wenn $\sqsubseteq$ eine Halbordnung auf M ist, welche anderen Beziehungen in $\sqsubseteq$ müssen mindestens zusätzlich gelten? (Welche Paare müssen in Relation zueinander stehen)
- Fügen Sie nun noch $\{\top, \bot\}$ mit ihren bekannten Bedeutungen als grösstes und kleinstes Element der Menge M hinzu. Zeichnen Sie anschliessend das zugehörige Hasse-Diagram für die Halbordnung. Ist diese Halbordnung auch ein Verband? Begründen Sie.

2.2 *Bestimmung von Supremum und Infimum*

Bestimmen Sie nun folgende Elemente sofern sie existieren oder erklären Sie warum sie nicht existieren können.

a) $h \sqcap i$	b) $(a \sqcup b) \sqcup c$	c) $a \sqcup (c \sqcup d)$	d) $a \sqcup c$	e) $a \sqcup (b \sqcup c)$
f) $(a \sqcup c) \sqcup d$	g) $h \sqcap j$	h) $c \sqcup d$	i) $\bigsqcup\{a, c, d\}$	

Aufgabe 3: *Produkt und Summe von Verbänden*

Eine Menge von Verbänden endlicher Höhe V_i kann zu einem neuen Verband kombiniert werden.

Als Produkt der einzelnen Verbände, wobei $\sqcup$, $\sqcap$ komponentenweise berechnet werden.

$$V_1 \times ... \times V_n \quad = \quad \{(x_1, .., x_n) \mid x_i \in V_i\}$$

Als Summe der Verbände. wobei $(i, x) \sqsubseteq (j, y) \iff i = j \wedge x \sqsubseteq y$ gilt.

$$V_1 + ... + V_n \quad = \quad \{(i, x_i) \mid x_i \in V_i \setminus \{\top, \bot\}\} \cup \{\top, \bot\}$$

3.1 *Höhe des Produkts*

Zeigen oder widerlegen Sie, dass für die Höhe des Produkts folgende Aussage gilt:

Höhe($V_1 \times ... \times V_n$) = Höhe($V_1$) + .. + Höhe($V_n$)

3.2 *Höhe der Summe*

Zeigen oder widerlegen Sie, dass für die Höhe der Summe folgende Aussage gilt:

Höhe($V_1 + ... + V_n$) = max(Höhe(V_1), .. , Höhe(V_n))

Aufgabe 4: *Fixpunkte*

4.1 *Ungewöhnliche Fixpunkte*

a) Bestimmen Sie einen Verband $(L, \sqsubseteq)$ und eine Funktion $f : L \to L$, die mehrere Fixpunkte, aber keinen kleinsten Fixpunkt, besitzt.

b) Bestimmen Sie einen Verband $(L, \sqsubseteq)$ und eine monotone Funktion $f : L \to L$, die einen kleinsten Fixpunkt l besitzt, so dass aber $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} f^n(\bot) \neq l$.

4.2 *Gleichungssysteme für Ungleichungen*

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Fixpunkte zur Berechnung der kleinsten Lösung von bestimmten Gleichungssystemen verwendet werden können. Das funktioniert auch für Ungleichungen.

Sei V ein Verband endlicher Höhe, x_i Variablen und $f_i : V^n \to V$ monotone Funktionen. So lässt sich ein System von Ungleichungen in ein System von äquivalenten Gleichungen umformen.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \sqsubseteq & f_1(x_1, .., x_n) \\ & ... & \\ x_n & \sqsubseteq & f_n(x_1, .., x_n) \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_1 \cap f_1(x_1, .., x_n) \\ & ... & \\ x_n & = & x_n \cap f_n(x_1, .., x_n) \end{array}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Gültigkeit dieser Äquivalenz.