Grundlagen der Datenflußanalyse und Programmabhängigkeitsgraphen

Prof. Dr.-Ing. G. Snelting

Universität Karlsruhe
Lehrstuhl Programmierparadigmen

[Wozu Datenflußanalyse?]

Datenflußanalyse ist eine Familie von Verfahren zur

- Codeoptimierung:

```
x := 42;
... // x wird hier
... // nicht umdefiniert     ⟹ x := 42;
IF x<0 THEN
  p(a,b,c);
```

- Parallelisierung:

```
FOR i:= 1 TO 100 DO
  a[i] := a[i]+1;
```

⟹

```
PARBEGIN
  a[1] := a[1]+1;
  ...
  a[100] := a[100]+1;
PAREND
```

- Programmverstehen:

  Welche Anweisungen beeinflussen den Wert von x *in Zeile 4711 ?*

- Sicherheitsprüfung:

  ... siehe Vortrag ...

Es gibt viele verschiedene Datenflußanalysen

Beispiele:

1. *Constant Propagation*: Wert von Variablen zur Übersetzungszeit bekannt ⇒ Kontrollkonstrukte statisch auswerten:

```
x := 42;
y := 17;
IF x<0 THEN
  read(y);
  x := y;
END;
IF y>0 THEN
  p(x);
```

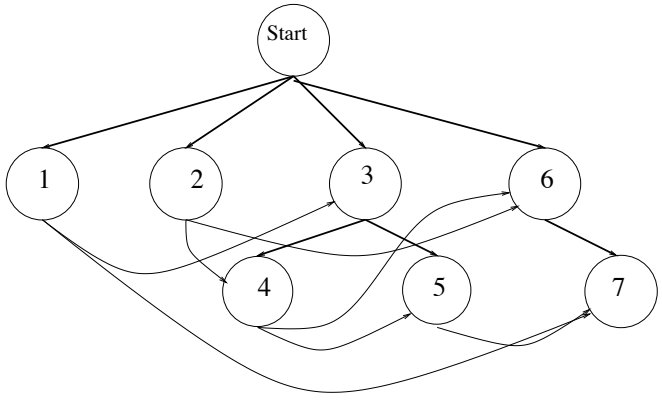
$\Longrightarrow$

```
x := 42;
y := 17;
p(42);
```

2. *Programmabhängigkeitsgraph*: Kanten zwischen Definition / Verwendung einer Variablen bzw zwischen Kontrollprädikaten / kontrollierten Anweisungen

```
(1)  x := 42;
(2)  y := 17;
(3)  IF x<0 THEN
(4)    read(y);
(5)    x := y;
     END;
(6)  IF y>0 THEN
(7)    p(x);
```

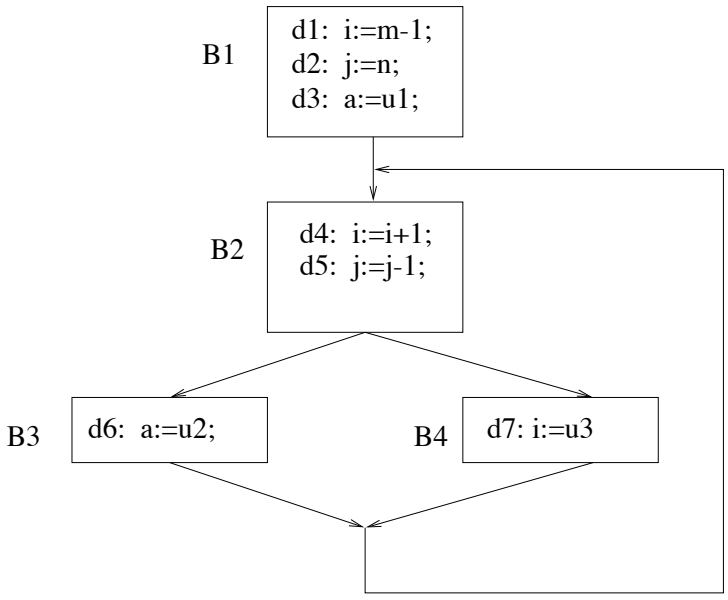
$\Longrightarrow$



Ausgangspunkt der Analyse ist stets der Kontrollflußgraph (CFG):

```
i := m-1;
j := n;
a := u1;
WHILE e2 DO
  i := i+1;
  j := j-1;
  IF e1 THEN
    a := u2
  ELSE
    i := u3
  END;
END;
```

$\Longrightarrow$



Knoten des CFG: *Basic Blocks* - elementare Anweisungssequenzen ohne Kontrollflußänderung

Kante von B_i nach B_j: B_j kann unmittelbar nach B_i ausgeführt werden

CFG kann i.a. beliebige Zyklen enthalten (GOTOs!)

Datenflußanalyse orientiert sich an der Struktur des CFG

Ein bekanntes Datenflussproblem: Welche Zuweisung hat potentiellen Effekt auf eine gegebene Anweisung?

- Eine Variable x wird durch eine Zuweisung, Read-Anweisung, Ausgabe-Parameter usf *definiert*.
- Definitionen (Zuweisungsstellen) $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$; $D_x \subseteq D$: Menge aller Definitionen von x
- Eine Definition $d \in D_x$ *killt* alle anderen Definitionen von x
- Eine Definition d *erreicht* einen Basic Block B, wenn sie nicht vorher gekillt wird. Dh es gibt Pfad im CFG $d \rightarrow^* B$, auf dem keine weitere Definition von x liegt

Für jeden Basic Block B werden zunächst bestimmt:

1. $gen(B)$: Menge der in B neu erzeugten Definitionen
2. $kill(B)$: Menge der in B gekillten Definitionen

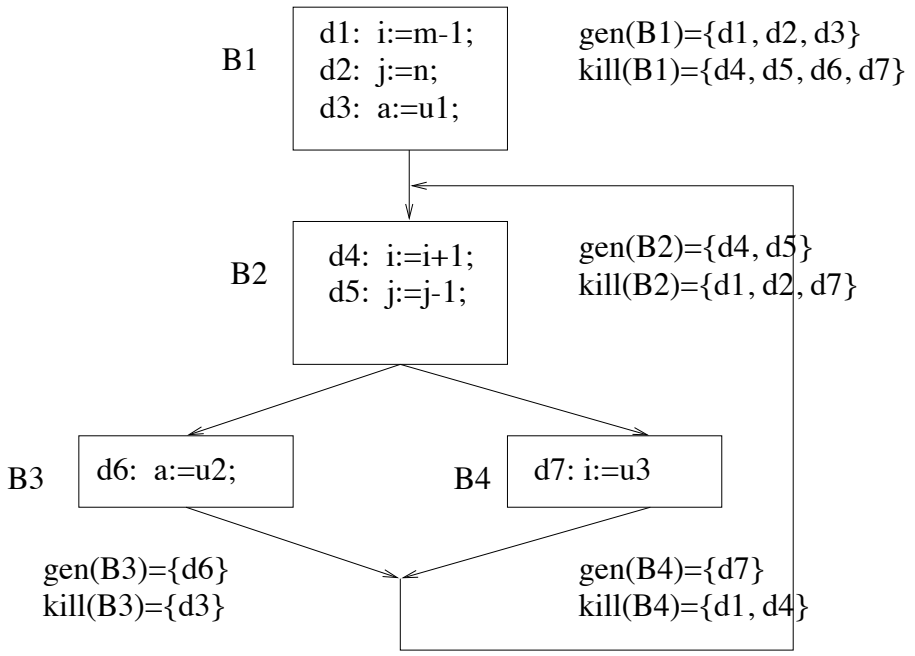
Bsp: $B \cong d:$ x := E; (B enthält nur eine Zuweisung)

$$gen(B) = \{d\},\ kill(B) = D_x - \{d\}$$

im allgemeinen ist

$$kill(B) = \bigcup_{x \in vars(B)} D_x - (gen(B) \cap D_x)$$

im Beispielprogramm:



Der Effekt jedes Basic Blocks B wird durch *Transferfunktion* beschrieben: $f_B : 2^D \rightarrow 2^D$

$$f_B(X) = gen(B) \cup (X - kill(B))$$

„Eine Definitionsmenge X wird in B teilweise gekillt, andererseits kommen neue Definition hinzu“

Gesucht für jeden B: $in(B), out(B) \in 2^D$ mit

$$out(B) = f_B(in(B)), \quad in(B) = \bigcup_{C \in pred(B)} out(C)$$

Dies Lösung sagt über jeden BB, welche Definitionen ihn beeinflussen können

Die Transferfunktionen für sichtbare Definitionen sind nur ein Beispiel einer allgemeinen Methodik:

- Relevante Information wird in Form von *abstrakten Werten* berechnet
- abstrakte Werte werden für Ein- und Ausgang jedes Basic Blocks berechnet
- abstrakte Werte sind stets Elemente eines Verbandes $(L; \leq, \sqcap, \sqcup)$ mit endlicher Höhe

  $\rightsquigarrow$ *Extrafolien Grundlagen der Ordnungs- und Verbandstheorie*

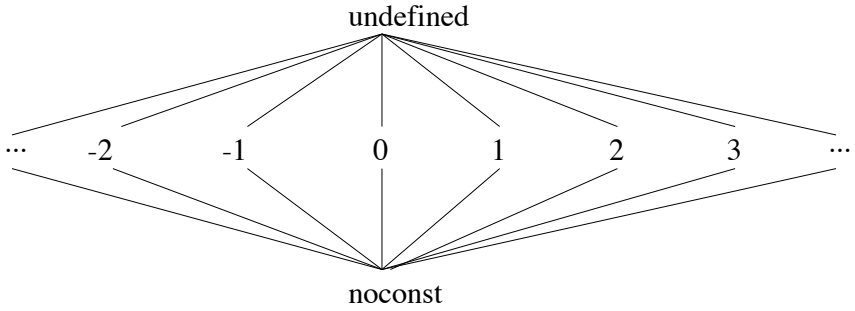
  Idee: wenn man im Verband von oben nach unten geht, wird die durch Verbandselement repräsentierte Information immer genauer. $\top$ steht für Unwissen, $\bot$ steht für Widerspruch (zuviel Information)

  Bem. Leider ist die Literatur nicht einheitlich, und manche Verbände stehen in manchen Büchern auf dem Kopf. Mathematisch ist das belanglos (dualer Verband)
- Beispiel 1: Verband für sichtbare Definitionen:

$$L_S = (L; \leq, \sqcap, \sqcup) = (2^D; \supseteq, \cup, \cap)$$

  ist endlicher Potenzmengenverband.
  steht auf dem Kopf: $\varnothing = \bot$ repräsentiert Nichtwissen

- Beispiel 2: Verband für Konstantenpropagation L_P beschreibt folgende Fälle:
  1. man weiss nichts über den Wert einer Variable an einem Programmpunkt ($\top$ = undefined)
  2. die Variable hat an einem bestimmten Programmpunkt genau einen bekannten Wert n
  3. die Variable hat an einem Punkt 2 oder mehr verschiedene Werte ($\bot$ = noconst)



der *flache Verband*: unendlich breit, Höhe 3

formal: $L_P = IN \cup \{\top, \bot\}$, $x \leq y \iff x = y \vee x = \bot$

Dieser Verband steht nicht auf dem Kopf :-)

Wieso Verbände?

- es gibt Supremum und Infimum (wichtig für zusammenlaufende CFG-Kanten)
- monotone Funktionen in Verbänden endlicher Höhe haben stets Fixpunkte
- Potenzmengenverbände können effizient durch Bitvektoren implementiert werden

Sei $(L; \leq, \sqcap, \sqcup)$ der Verband der abstrakten Werte

Zu jedem Basic Block B wird eine *Transferfunktion*

$$f_B : L \to L \in F = \{ f_B \mid B \text{ basic Block } \}$$

angegeben, die die Wirkung von B beschreibt

ferner wird verlangt:

1. $id_L \in F$ (Identität $\rightsquigarrow$ Nullanweisung)
2. $x \leq y \Rightarrow f_B(x) \leq f_B(y)$ (Monotonie $\rightsquigarrow$ Konvergenz)
3. $f_B \circ f_{B'} \in F$ (Abgeschlossenheit)
4. $f_B \sqcap f_{B'} \in F$ (punktweises Infimum)
5. evtl. $f_B(x \sqcap y) = f_B(x) \sqcap f_B(y)$ (Distributivität)

Distributive Analysen sind genauer (s.u.)

Beispiel: sichtbare Definitionen. $L_S = (L; \leq, \sqcap, \sqcup) = (2^D; \supseteq, \cup, \cap)$, $f_B : 2^D \to 2^D$, $f_B(X) = gen(B) \cup (X - kill(B))$
die f_B sind monoton und distributiv. Beweis:
1. $X \leq Y \implies Y \subseteq X \implies f_B(Y) = gen(B) \cup (Y - kill(B)) \subseteq$
$\subseteq gen(B) \cup (X - kill(B)) = f_B(X) \implies f_B(X) \leq f_B(Y)$
2. $f_B(X \sqcap Y) = f_B(X \cup Y) = gen(B) \cup ((X \cup Y) - kill(B)) =$
$\big(gen(B) \cup (X - kill(B))\big) \cup \big(gen(B) \cup (Y - kill(B))\big) =$
$f_B(X) \sqcap f_B(Y)$

- gesucht: stabile Werte $in(B), out(B) \in L$ am Anfang und Ende jedes Basic Blocks B mit

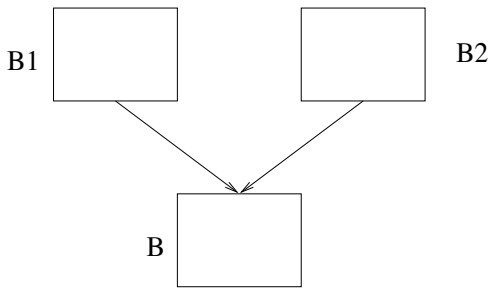
  $$out(B) = f_B(in(B))$$

  Dies definiert ein Gleichungssystem!

- Hintereinanderausführung von Basic Blocks entspricht Komposition der Transferfunktionen:

  $$f_{B;B'}(D) = f_{B'}(f_B(D)) \qquad in(B') = out(B)$$

- falls zwei Pfade im CFG zusammenlaufen, muss das Infimum ihrer Transferfunktionen berechnet werden:



$$f_{(B1||B2)}(X) = (f_{B1} \sqcap f_{B2})(X) = f_{B1}(X) \sqcap f_{B2}(X)$$

Im speziellen Fall „sichtbare Definitionen“ müssen die entsprechenden Definitionsmengen $\in 2^D$ *vereinigt* werden:

$$in(B) = out(B1) \cup out(B2) = f_{B1}(in(B1)) \cup f_{B2}(in(B2))$$

Beispiel: Sichtbare Definitionen für das Programm S. 4.
Transferfunktion von S. 6.

$\Rightarrow$ Gleichungssystem für alle Werte $in(B_i), out(B_i)$

$$\begin{aligned} in(B1) &= \emptyset \\ in(B2) &= out(B1) \cup out(B3) \cup out(B4) \\ &= f_{B1}(in(B1)) \cup f_{B3}(in(B3)) \cup f_{B4}(in(B4)) \\ in(B3) &= in(B4) = out(B2) = f_{B2}(in(B2)) \end{aligned}$$

Lösungsverfahren: *Fixpunktiteration*. Init: $in(B_i) = \emptyset$

Mengen werden als Bitvektoren dargestellt

Beispieleinträge:
$in_1(B2) = out_0(B1) \cup out_0(B3) \cup out_0(B4) =$
$= 1110000 \vee 0000010 \vee 0000001 = 1110011;$
$out_1(B2) = gen(B2) \cup (in_1(B2) - kill(B2)) =$
$= 0001100 \vee (1110011 \wedge \overline{1100001}) = 0011110$

Block B	$in_0(B)$	$out_0(B)$	$in_1(B)$	$out_1(B)$	$in_2(B)$	$out_2(B)$
$B1$	0000000	1110000	0000000	1110000	0000000	1110000
$B2$	0000000	0001100	1110011	0011110	1111111	0011110
$B3$	0000000	0000010	0001100	0001110	0011110	0001110
$B4$	0000000	0000001	0001100	0010111	0011110	0010111

$\Rightarrow$ am Anfang von B4 sind $d3, d4, d5, d6$ sichtbar,
insbesondere die beiden Zuweisungen an a!

Jeder B_i ist aus elementaren Zuweisungen zusammengesetzt. Es ist

$$L = \{(x, c) \mid x \in Vars(P), c \in L_C\}$$

Transferfunktion für Zuweisung `x := E`: $f_B : 2^L \to 2^L$

$$Z = \{(\mathsf{v1}, c_1), (\mathsf{v2}, c_2), \ldots\}$$

$$\mathsf{x := E}$$

$$f_B(Z) = Z \setminus \{(\mathsf{x}, c_x)\} \cup \{(\mathsf{x}, eval(\mathsf{E}))\}$$

mit

$$eval(E) = \begin{cases} value(E) & \forall v \in Vars(E) : (v, c_v) \in Z \\ & \wedge c_v \notin \{\top, \bot\} \\ \top & \exists v \in Vars(E) : (v, \top) \in Z \\ \bot & \exists v \in Vars(E) : (v, \bot) \in Z \end{cases}$$

wobei $\top = undefined$, $\bot = noconst$.

$\bot$ bedeutet: die Variable ist garantiert keine Konstante

Bem. $(\mathsf{x}, eval(\mathsf{E}))$ entspricht $gen(B)$, (x, c_x) entspricht $kill(B)$

f_B ist monoton, aber nicht distributiv! (Übung)

Betrachtet man im Beispiel S. 4 $m, n, u1, u2, u3$ als Konstanten, i, j, a als Variablen, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} in(B1) &= \{(i, \top), (j, \top), (a, \top)\} \\ in(B2) &= out(B1) \sqcap out(B2) \sqcap out(B3) \\ &= f_{B1}(in(B1)) \sqcap f_{B3}(in(B3)) \sqcap f_{B4}(in(B4)) \\ in(B3) = in(B4) &= out(B2) = f_{B2}(in(B2)) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} X \sqcap Y &= \{(v, r) \mid (v, a) \in X, (v, b) \in Y, r = a \sqcap b \in L_C\} \\ &\quad \cup \{(v, a) \in X \mid (v, b) \notin Y\} \cup \{(v, b) \in Y \mid (v, a) \notin X\} \end{aligned}$$

Bsp: $\{(i, 42), (j, \top)\} \sqcap \{(j, 17), (i, 13), (a, 1)\} = \{(i, \bot), (j, 17), (a, 1)\}$

Nun führen wir die Fixpunktiteration durch (Übung!)

Ergebnis u.a.:
$in(B2) = \{(i, (m-1) \sqcap (m-1+1) \sqcap u3), (j, n \sqcap (n+1)), (a, u1 \sqcap u2)\} = \{(i, \bot), (j, \bot), (a, \bot)\}$

$\Longrightarrow$ Am Anfang von $B2$ sind die Variablen i, j, a garantiert keine Konstanten, sondern haben zur Laufzeit mindestens zwei verschiedene Werte

Falls IF/WHILE-Ausdrücke konstant werden, so verschwinden Pfade, dh *das Gleichungssystem ändert sich*! Man muss dann die Iteration mit dem neuen System wiederholen

[Korrektheit der Fixpunktiteration]

Satz. (Kam/Ullman 77) Seien $P_1, P_2, \ldots$ alle Pfade von $Start$ zu Programmpunkt s; seien die Transferfunktionen $f_B \in F$ distributiv; sei $fix(s) \in L$ der durch Fixpunktiteration für $out(s)$ berechnete Wert. Dann ist

$$fix(s) = \bigsqcap_i f_{P_i}(\top)$$

Dies ist deswegen bemerkenswert, weil es i.a. unendlich viele Pfade gibt.

Falls f nicht distributiv, gilt nur $\geq$ statt $=$, d.h. der Fixpunkt stellt eine konservative Approximation dar.

Für manche nicht-distributive Probleme ist die exakte Lösung nicht berechenbar zB Konstantenpropagation

Es gibt Verallgemeinerungen des Satzes für interprozedurale Analyse (Knoop et al 95)

x, y seien Anweisungen bzw Basic Blocks; $gen(x), in(x)$ wie oben, $var(d)$ sei die in einer Definition definierte Variable; $uses(x)$ seien die in x benutzten Variablen.

Def. *(Datenabhängigkeit)*

$$x \to y \iff \exists d \in gen(x) : d \in in(y) \wedge var(d) \in uses(y)$$

Def. *(Dominanz)* x dominiert y, wenn jeder CFG-Pfad von $Start$ zu y über x führt.

Def. *(Postdominanz)* y postdominiert x, wenn jeder CFG-Pfad von x zu $Stop$ über y führt.

Def. *(Kontrollabhängigkeit)*

$x \to y \iff \exists$ Pfad P von x nach y im CFG $\forall z \in P, z \neq x, z \neq y : y$ postdominiert $z \ \wedge \ y$ postdominiert nicht x

Bem. In strukturierten Programmen sind kontrollabhängige Anweisungen Y gerade jene im Rumpf eines `if`, `while` usw; sie hängen von der regierenden Bedingung x ab

Def. Der PDG $(S, \to)$ hat alle Anweisungen als Knoten und Daten-/Kontrollabhängigkeiten als Kanten.

Beispiel: siehe S. 3

Bem. Falls es Prozeduren, Adressen (Aliasing) oder komplexe Datenstrukturen gibt, wird der PDG wesentlich komplizierter

Beispiel: Programm für elektronische Waage ($\rightsquigarrow$ PTB)

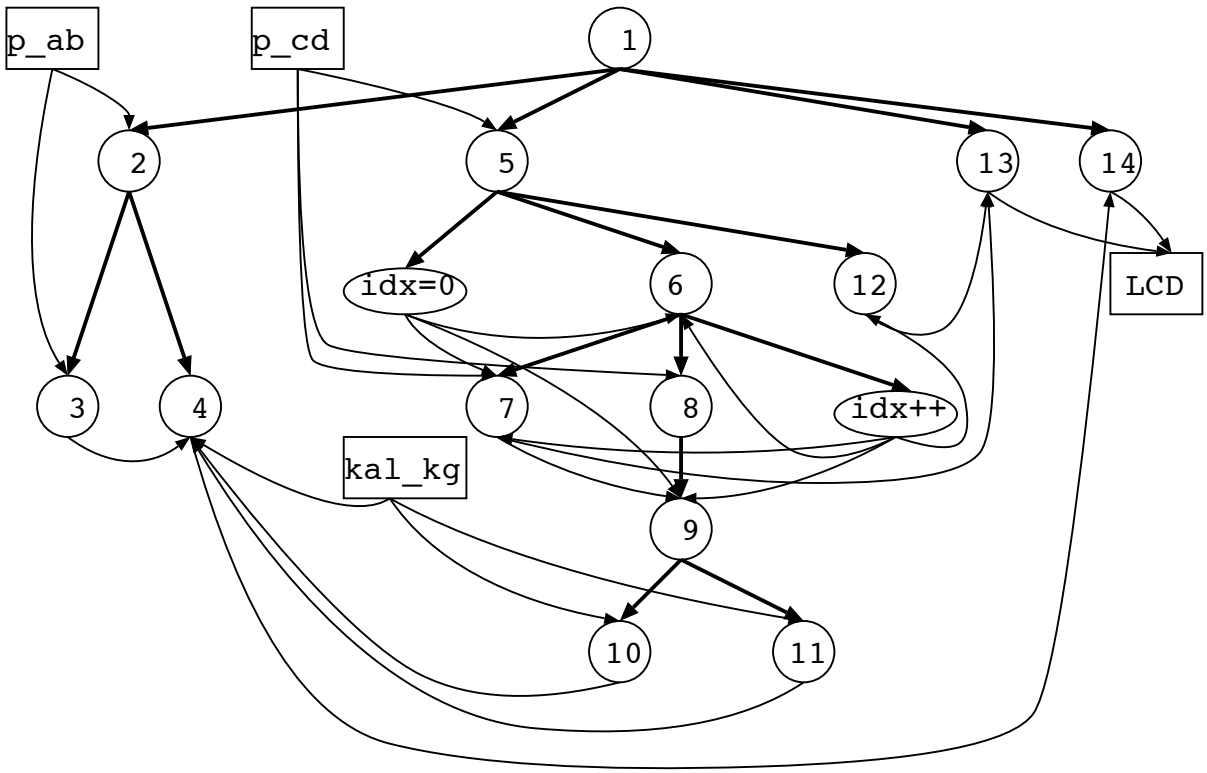
```
   void main() {
     int p_ab[2] = {0, 1};
     int p_cd[1] = {0};
     char e_puf[8];
     int u; int idx;
     float u_kg; float kal_kg = 1.0;

(1)  while(TRUE) {
(2)    if ((p_ab[CTRL2] & 0x10)==0) {
(3)      u = ((p_ab[PB] & 0x0f) << 8) + (unsigned int)p_ab[PA];
(4)      u_kg = u * kal_kg;
         }
(5)    if ((p_cd[CTRL2] & 0x01) != 0) {
(6)      for (idx=0;idx<7;idx++) {
(7)        e_puf[idx] = p_cd[PA];
(8)        if ((p_cd[CTRL2] & 0x10) != 0) {
(9)          switch(e_puf[idx]) {
(10)            case '+': kal_kg *= 1.01; break;  /* unerlaubter */
(11)            case '-': kal_kg *= 0.99; break;  /* Datenfluss  */
                }
            }
          }
(12)     e_puf[idx] = '\0';
         }
(13)   printf("Artikel: %07.7s\n,e_puf);
(14)   printf("    %6.2f kg    ",u_kg);
       }
    }
```

p_cd: Keyboard-Eingaberegister; Kontrollbits

p_ab: Messwert-Eingaberegister

zugehöriger PDG:



fett: Kontrollabhängigkeiten
dünn: Datenabhängigkeiten

Welche Anweisungen y können Programmpunkt x beeinflussen, und welche tun dies garantiert nicht?

Def. Der Rückwärtsslice $BS(x)$ enthält alle Anweisungen, die x beeinflussen können.

im PDG ist

$$BS(x) = \{y \mid y \rightarrow^* x\}$$

Bem. $BS(x)$ darf zu groß sein, aber niemals zu klein (Prinzip der konservativen Approximation). In der Praxis will man natürlich möglichst kleine $BS(x)$

Beispiel: für obiges Programm ist $(5) \in BS((14))$. Deshalb potentielle Beeinflussung des angezeigten Messwertes durch das Keyboard.

Def. Vorwärtsslice $FS(x) = \{y \mid x \rightarrow^* y\}$

Chop $CH(x, y) = \{z \mid x \rightarrow^* z \rightarrow^* y\} = BS(y) \cap FS(x)$

Bem. Diese einfachen Formeln gelten nicht mehr im interprozeduralen Fall sowie für komplexe Datenstrukturen

Datenflußanalyse ist ein weites Feld, in das enorme Forschungsanstrengungen geflossen sind und fließen

Erwähnt seien

- interprozedurale Analyse
- Analyse von Arrays
- Analyse von Pointern
- effiziente Implementierungstechniken
- inkrementelle / bedarfsgetriebene Datenflußanalyse
- automatische Parallelisierung
- Program Slicing
- Anwendungen in Wartung, Reengineering, Sicherheitsanalyse, ...

Datenflußanalyse = abstrakte Interpretation + Model Checking

(B. Steffen)

Literatur: Nielson/Nielson/Hankin: Principles of Program Analysis. Springer 1999