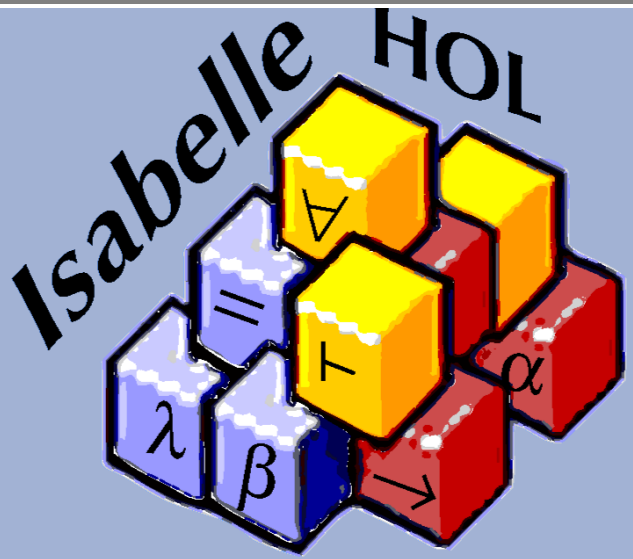
Karlsruher Institut für Technologie

# Theorembeweiserpraktikum

## Anwendungen in der Sprachtechnologie

LEHRSTUHL PROGRAMMIERPARADIGMEN



# Evaluation

Karlsruher Institut für Technologie

# Teil XXX

# *Lifting und Transfer*

# Rückblick: Eigene Typen in HOL definieren

```
typedef 'a ne = "{xs :: 'a list . xs ≠ []}"
  by (rule exI[where x = "[undefined]"], simp)

definition singleton :: "'a ⇒ 'a ne"
  where "singleton x = Abs_ne [x]"
definition append :: "'a ne ⇒ 'a ne ⇒ 'a ne"
  where "append l1 l2 = Abs_ne (Rep_ne l1 @ Rep_ne l2)"
definition head :: "'a ne ⇒ 'a"
  where "head l = hd (Rep_ne l)"

lemma "head (append l1 l2) = head l1"
  unfolding head_def append_def
  apply (subst Abs_ne_inverse)
  using Rep_ne[of l1] apply simp
  using Rep_ne[of l1] apply simp
  done
```

# Heute: lifting und transfer

Das Beweisen mit den Abstraktions- und Representationsfunktionen ist mühsam und unnatürlich: So wird die Erhaltung einer Invariante beim Verwenden der Funktion bewiesen, und nicht beim Definieren (siehe `tail`).

Die Isabelle-Pakete Lifting und Transfer erlauben es, Funktionen einmal bei der Definition als „korrekt“ zu beweisen und Lemmas mit einem Methodenaufruf in die Welt der zugrundeliegenden Repräsentation zu übertragen und dann dort zu beweisen.

# Lifting und Transfer verwenden

1. Typ registrieren:

   **setup_lifting** *type_definition_typname*

# Lifting und Transfer verwenden

1. Typ registrieren:

   **setup_lifting** *type_definition_typname*

2. Definitionen liften:

   **lift_definition** *name :: type* **is** *"ausdruck"*

   *Beweis*

   wobei *ausdruck* die Definition von *name* auf den konkreten Datentyp ist und der *Beweis* beweist dass die Typ-Invarianten respektiert werden.

# Lifting und Transfer verwenden

1. Typ registrieren:

   **setup_lifting** *type_definition_typname*
2. Definitionen liften:

   **lift_definition** *name :: type* **is** *"ausdruck"*

   *Beweis*

   wobei *ausdruck* die Definition von *name* auf den konkreten Datentyp ist und der *Beweis* beweist dass die Typ-Invarianten respektiert werden.
3. Aussagen auf die konkreten Typen übertragen: **apply** *transfer*
   Ersetzt das aktuelle Ziel durch ein gleichwertiges auf dem konkreten Datentyp, indem die per **lift_definition** definierten Funktionen durch ihre konkrete Definition ersetzt werden.

# Beispiel: Sortierte Listen

Typ registrieren:

```
typedef slist = "{xs. sorted xs}" morphisms list_of as_sorted
  by (rule_tac x="[]" in exI) simp

setup_lifting type_definition_slist
```

# Beispiel: Sortierte Listen

Typ registrieren:

**typedef** *slist = "{xs. sorted xs}"* **morphisms** *list_of as_sorted*
**by** *(rule_tac x="[]"* **in** *exI) simp*

**setup_lifting** *type_definition_slist*

Definitionen:

**lift_definition** *Singleton :: "nat ⇒ slist"* **is** *"λx. [x]"* **by** *simp*
**lift_definition** *hd :: "slist ⇒ nat"* **is** *"List.hd"* **..**
**lift_definition** *take :: "nat ⇒ slist ⇒ slist"* **is** *"List.take"* **..**
**lift_definition** *smerge :: "slist ⇒ slist ⇒ slist"* **is** *"Scratch.merge"* **by**
*(rule sorted_merge_sorted)*

# Beispiel: Sortierte Listen

Lemmas zu Definitionen auf dem abstrakten Typ:

**lemma** *set_of_Singleton [simp]: "set_of (Singleton x) = {x}"*
  Aktuelles Ziel: *set_of (Singleton x) = {x}*
**apply** *transfer*
  Aktuelles Ziel: *⋀x. set [x] = {x}*
**apply** *simp*
  Aktuelles Ziel: *No subgoals!*
**done**

oder gleich

**by** *transfer simp*

# Beispiel: Sortierte Listen

Lemmas können Invarianten nutzen:

**lemma** *"list_of xs = a#b#ys* $\Longrightarrow$ *a* $\leq$ *b"*

Aktuelles Ziel: *list_of xs = a # b # ys* $\Longrightarrow$ *a* $\leq$ *b*

**apply** *transfer*

Aktuelles Ziel: $\bigwedge$*xs a b ys.* $[\![$*sorted xs; xs = a # b # ys*$]\!]$ $\Longrightarrow$ *a* $\leq$ *b*

**apply** *simp*

Aktuelles Ziel: *No subgoals!*

**done**

# Beispiel: Sortierte Listen

Lemmas mit rein abstrakten Definitionen:

**definition** *insert :: "nat ⇒ slist ⇒ slist"*
  **where** *"insert x xs = smerge xs (Singleton x)"*

**lemma** *set_of_insert [simp]: "x ∈ set_of (insert x xs)"*

# Beispiel: Sortierte Listen

Lemmas mit rein abstrakten Definitionen:

**definition** *insert :: "nat ⇒ slist ⇒ slist"*
  **where** *"insert x xs = smerge xs (Singleton x)"*

**lemma** *set_of_insert [simp]: "x ∈ set_of (insert x xs)"*

Erster Versuch:

  **apply** *transfer*

Hier bringt *transfer* einen nicht weiter!

# Beispiel: Sortierte Listen

Lemmas mit rein abstrakten Definitionen:

**definition** *insert :: "nat ⇒ slist ⇒ slist"*
  **where** *"insert x xs = smerge xs (Singleton x)"*

**lemma** *set_of_insert [simp]: "x ∈ set_of (insert x xs)"*

Erster Versuch:

  **apply** *transfer*

Hier bringt *transfer* einen nicht weiter!

Zweiter Versuch:

  **unfolding** *insert_def* **by** *transfer simp*

# Beispiel: Sortierte Listen

Lemmas mit rein abstrakten Definitionen:

**definition** *insert :: "nat ⇒ slist ⇒ slist"*
  **where** *"insert x xs = smerge xs (Singleton x)"*

**lemma** *set_of_insert [simp]: "x ∈ set_of (insert x xs)"*

Erster Versuch:

  **apply** *transfer*

Hier bringt *transfer* einen nicht weiter!

Zweiter Versuch:

  **unfolding** *insert_def* **by** *transfer simp*

Schöner ist:

**lemma** *set_of_smerge: "set_of (smerge xs ys) = set_of xs ∪ set_of ys"*
  **by** *transfer simp*

und dann

  **unfolding** *insert_def* **by** *(simp add: set_of_smerge)*

Karlsruher Institut für Technologie

# Teil XXXI

# *Erzeugung von ausführbarem Code*

# Code exportieren

Isabelle kann Formalisierungen nach **SML**, **OCaml**, **Haskell** bzw. **Scala** exportieren.

$\Longrightarrow$ Dadurch sind verifizierte *ausführbare* Programme möglich.

- Jede HOL-Funktion wird in eine entsprechende Funktion der Zielsprache übersetzt.
- Jeder HOL-Typ wird ein entsprechenden Typ der Zielsprache übersetzt.
- **Basis:** Code-Gleichungen

Code-Erzeugung mit Befehl:

**export_code** *f* **in** *Sprache* **module_name** *Modul* **file** *Datei*

Die definierenden HOL-Gleichungen von *f* werden 1:1 in die Zielsprache übersetzt.

# Nicht ausführbare Definitionen

Nicht alle HOL-Funktionen können direkt übersetzt werden.

## Beispiel

Wie kann die Funktion

```
doubled xs =
  (if (∃ys. xs = ys @ ys) then Some (THE ys. xs = ys @ ys) else None)
```

übersetzt werden?

# Nicht ausführbare Definitionen

Nicht alle HOL-Funktionen können direkt übersetzt werden.

**Beispiel**

Wie kann die Funktion

```
doubled xs =
  (if (∃ys. xs = ys @ ys) then Some (THE ys. xs = ys @ ys) else None)
```

übersetzt werden?

**Problem:** Existenzquantor nur für enum-Typen ausführbar.

# Nicht ausführbare Definitionen

Nicht alle HOL-Funktionen können direkt übersetzt werden.

**Beispiel**

Wie kann die Funktion

```
doubled xs =
  (if (∃ys. xs = ys @ ys) then Some (THE ys. xs = ys @ ys) else None)
```

übersetzt werden?

**Problem:** Existenzquantor nur für enum-Typen ausführbar.

**Lösung:** Beweise alternative Code-Gleichung:

```
lemma doubled_code [code]: "doubled xs =
  (let ys = take (length xs div 2) xs in
    (if (xs = ys @ ys) then Some ys else None)"
```

# Code-Gleichungen

Eine Gleichung kann als Code-Gleichung für `f` verwendet werden, wenn

- `f` das oberste (und einzige) Funktionssymbol im linken Term ist,
- Patternmatching auf die Parameter von `f` nur via Datentyp-Konstruktoren erfolgt, und
- für alle Funktionssymbole auf der rechten Seite Code-Gleichungen existieren.

Insbesondere ist es nicht (direkt) möglich „partielle“ Code-Gleichungen anzugeben.

Späteres hinzufügen einer Gleichung als Code-Gleichung mit

**declare** *`lemma [code]`*

möglich.

# Beispiel

Siehe Formalisierung

# Diverses

- Das Kommando

  **value** *[code]* `"t"`

  übersetzt den Term `t` und wertet ihn aus.

- **eval** ist eine Beweis-Taktik, welche versucht, das aktuelle Ziel durch „ausrechnen“ (Brute-Force) zu zeigen.

- **code_thms** `f` zeigt alle registrierten Code-Gleichungen an, die zur Auswertung von `f` benötigt werden.

- **print_codesetup** zeigt *alle* registrierten Code-Gleichungen an.

# Datatype Refinement mit Invarianten

Lifting arbeitet gut mit dem Code-Generator zusammen: Es registriert `as_sorted` als Konstruktor für den Typ `slist` und definierte alle Operationen darauf. Man kann keine Code-Gleichung angeben die mittels `as_sorted x` ein Wert vom Typ `slist` konstruiert, ohne bewiesen zu haben, dass `sorted x` gilt.

**export_code** *insert hd take list_of set_of*
  **in** *Haskell*
  **file** *"-"*

*Manuell:* Auch möglich, dann mit **code_datatype**, `[code abstype]` und `[code abstract]` arbeiten.
$\Longrightarrow$ siehe nachher, sowie `isabelle doc codegen`.

# Code-Präprozessor

Vor Anwendung der Code-Gleichungen werden diese vom Code-Präprozessor bearbeitet.

- Rewrite-System mit ähnlicher Mächtigkeit wie Simplifier
- Attribut **code_unfold** verwenden, um Gleichungen zu registrieren
- **print_codeproc** zeigt das Präprozessor-Setup an

# Teil XXXII

# *Koinduktion*

# Was ist Koinduktion?

Duales Prinzip zu Induktion

Induktive Definition:

*kleinster* Fixpunkt, der die definierende Gleichung erfüllt.

Koinduktive Definition:

*größter* Fixpunkt, der die definierende Gleichung erfüllt.

# Was ist Koinduktion?

Duales Prinzip zu Induktion

Induktive Definition:

*kleinster* Fixpunkt, der die definierende Gleichung erfüllt.
Induktionsprinzip: Um eine Eigenschaft für alle Elemente zu zeigen, genügt es sie für eine beliebige Menge zu zeigen, die die definierende Gleichung erfüllt. (Der kleinste Fixpunkt muss darin enthalten sein)

Koinduktive Definition:

*größter* Fixpunkt, der die definierende Gleichung erfüllt.
Koinduktionsprinzip: Jede Menge, die die definierende Gleichung erfüllt, ist in der koinduktiven Definition enthalten.

# Koinduktive Prädikate in Isabelle

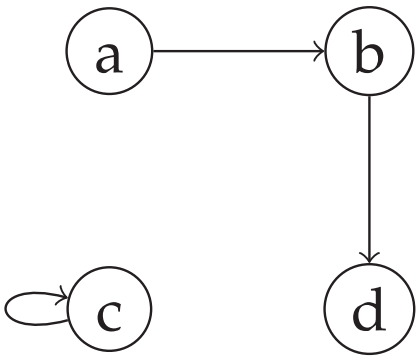
## Beispiel: Reflexiv transitive Hülle

```
inductive rtc :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool) ⇒ 'a ⇒ 'a ⇒ bool"
for r :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool)"
where refl: "rtc r x x"
  | trans: "r x y ⟹ rtc r y z ⟹ rtc r x z"
```

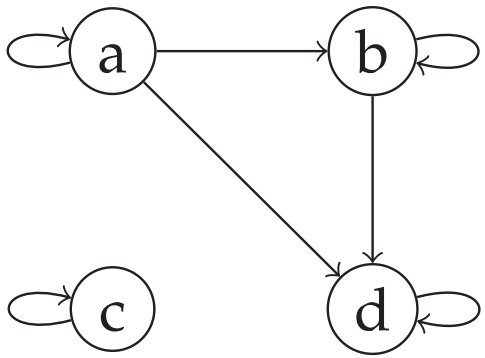
# Koinduktive Prädikate in Isabelle

## Beispiel: Reflexiv transitive Hülle

```
inductive rtc :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool) ⇒ 'a ⇒ 'a ⇒ bool"
for r :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool)"
where refl: "rtc r x x"
  | trans: "r x y ⟹ rtc r y z ⟹ rtc r x z"
```




**(a)** Graph r

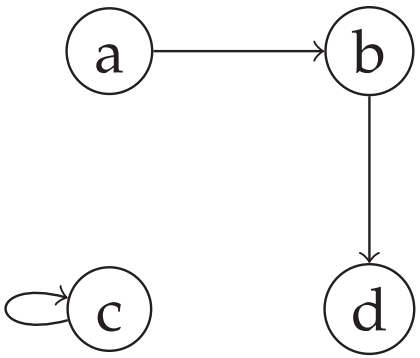



**(b)** Inductive RTC r

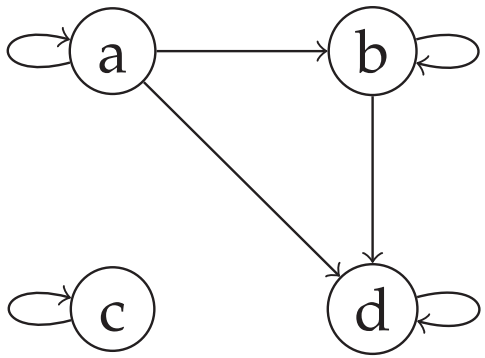
# Koinduktive Prädikate in Isabelle

## Beispiel: Reflexiv transitive Hülle

```
coinductive rtc :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool) ⇒ 'a ⇒ 'a ⇒ bool"
for r :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool)"
where refl: "rtc r x x"
  | trans: "r x y ⟹ rtc r y z ⟹ rtc r x z"
```




**(a)** Graph r

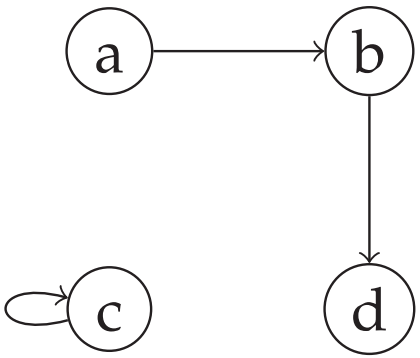



**(b)** Inductive RTC r

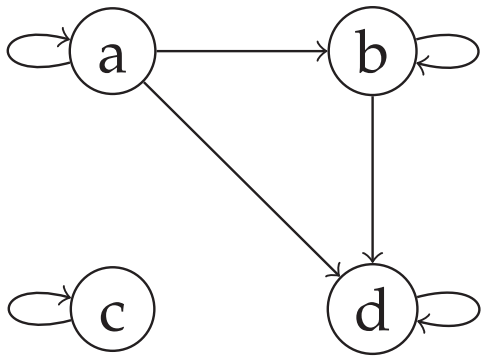
# Koinduktive Prädikate in Isabelle

## Beispiel: Reflexiv transitive Hülle

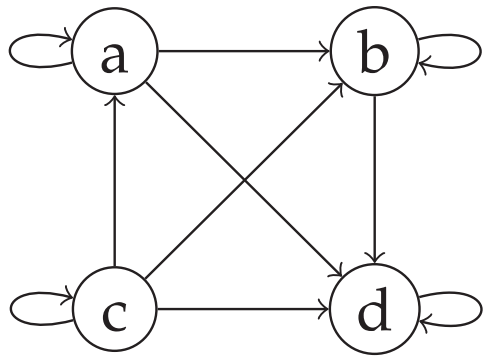
```
coinductive rtc :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool) ⇒ 'a ⇒ 'a ⇒ bool"
for r :: "('a ⇒ 'a ⇒ bool)"
where refl: "rtc r x x"
  | trans: "r x y ⟹ rtc r y z ⟹ rtc r x z"
```




**(a)** Graph r




**(b)** Inductive RTC r




**(c)** Coinductive RTC r

# Koinduktive Beweise

## Induktionsschema für `rtc`: `rtc.induct`

$$\texttt{rtc r a b} \Longrightarrow (\bigwedge \texttt{x. P x x})$$
$$\Longrightarrow (\bigwedge \texttt{x y z. r x y} \Longrightarrow \texttt{rtc r y z} \Longrightarrow \texttt{P y z} \Longrightarrow \texttt{P x z})$$
$$\Longrightarrow \texttt{P a b}$$

# Koinduktive Beweise

## Induktionsschema für `rtc`: `rtc.induct`

$$\texttt{rtc}\ r\ a\ b \Longrightarrow (\bigwedge x.\ P\ x\ x) \Longrightarrow (\bigwedge x\ y\ z.\ r\ x\ y \Longrightarrow \texttt{rtc}\ r\ y\ z \Longrightarrow P\ y\ z \Longrightarrow P\ x\ z) \Longrightarrow P\ a\ b$$

## Koinduktionsschema für `rtc`: `rtc.coinduct`

$$X\ a\ b \Longrightarrow (\bigwedge a\ b.\ X\ a\ b \Longrightarrow (\exists x.\ a = x \wedge b = x) \vee (\exists x\ y\ z.\ a = x \wedge b = z \wedge r\ x\ y \wedge (X\ y\ z \vee \texttt{rtc}\ r\ y\ z))) \Longrightarrow \texttt{rtc}\ r\ a\ b$$

Beweismethoden: *coinduct*/*coinduction* – analog zu *induct*/*induction*

# Koinduktive Datentypen und Funktionen

## Beispiel: Lazy Listen

**codatatype** *'a llist = lnull: LNil | LCons (lhd: 'a) (ltl: "'a llist")*

Auch hier *duale Sichtweise*: Elemente werden erzeugt, statt abgebaut.

## Beispiel: Iterate

**primcorec** *literate :: "('a ⇒ 'a) ⇒ 'a ⇒ 'a llist"*
**where** *"literate f s = LCons s (literate f (f s))"*

Mehr: siehe Sitzung.