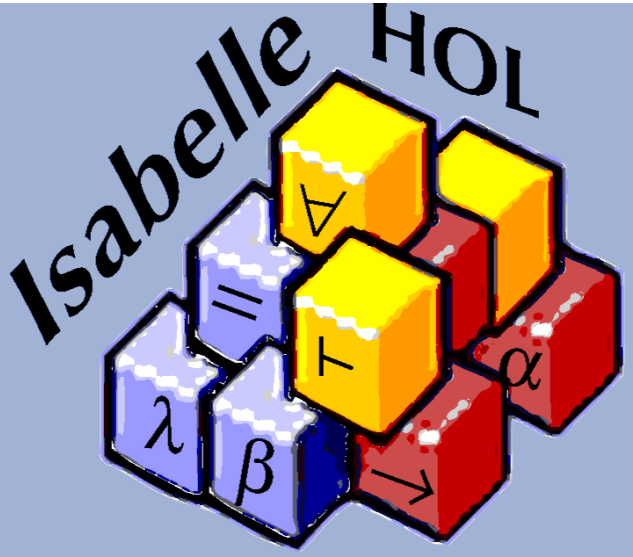
Karlsruher Institut für Technologie

Theorembeweiserpraktikum

Anwendungen in der Sprachtechnologie

LEHRSTUHL PROGRAMMIERPARADIGMEN



Teil XVII

Verknüpfung von Beweismethoden

Hintereinanderausführung mit Backtracking

lemma `"∀x. P x ⟹ ∀x. Q x ⟹ Q a"`
apply `(erule allE)`
by `assumption` ⟵ geht schief!

stattdessen:
lemma `"∀x. P x ⟹ ∀x. Q x ⟹ Q a"`
by `(erule allE, assumption)` ⟵ geht gut!

, wendet Beweismethoden hintereinander an und verwendet dabei gemeinsamen Backtracking-Stack.

Weitere

Karlsruher Institut für Technologie

Structural Composition

`apply (`m_1`;`m_2`)` wendet m_2 auf alle Teilziele an, die durch die Anwendung von m_1 neu entstehen.

Alternative Choices

`apply (`m_1`|`m_2`)` wendet m_1 an. (Nur) falls m_1 fehlschlägt wird m_2 angewendet.

Try

`apply m?` wendet m an, bricht aber nicht ab falls Anwendung fehlschlägt.

Repeat

`apply m+` wendet m mehrfach an (min. 1 mal), bis m fehlschlägt.

Restriction to subgoals

`apply m[n]` wendet m an und schränkt den Beweiszustand dabei auf die ersten n Teilziele ein.

Teil XVIII

Automatische Beweissuche

Sledgehammer

Karlsruher Institut für Technologie

Das Kommando **sledgehammer** führt eine automatische Beweissuche auf dem aktuellen Teilziel durch.

Optionen

timeout	Setzt die maximale Suchdauer in Sekunden fest. Beispiel *[timeout = 360]*
isar_proofs	Erzeuge Isar-Beweise anstelle von Ein-Zeilern (verwendet nur ATPs keine SMT-Solver).
provers	Verwende nur die angegebenen Beweiser. Beispiel *[provers = e spass remote_vampire]*

Siehe auch: `isabelle doc sledgehammer`

Sledgehammer Panel

sledgehammer ist in Isabelle/jEdit auch als Panel verfügbar:

```
146  lemma αn_distinct: "distinct αn"
147
148    sorry
149
150  lemma distinct_predecessors: "distinct (predecessors n)"
151  proof -
152    from iterate_to_list_correct [OF pi.pred_list_it_correct [OF assms], of n]
153    have "distinct (inEdges n)"
154      by (simp add: iterate_to_list_def)
```

Provers: cvc4 z3 spass e remote_vampire | Isar proofs | Try methods | Apply | Cancel | Locate | 100%

```
"e": Try this: by (metis foldri_cons_id iterate_to_list_correct iterate_to_list_def ni.nodes_list_it_correct) (76 ms).
"cvc4": Try this: by (metis foldri_cons_id iterate_to_list_correct iterate_to_list_def ni.nodes_list_it_correct) (72 ms).
"z3": Try this: by (metis foldri_cons_id iterate_to_list_correct iterate_to_list_def ni.nodes_list_it_correct) (32 ms).
"spass": Try this: by (metis foldri_cons_id iterate_to_list_correct iterate_to_list_def ni.nodes_list_it_correct) (24 ms).
"remote_vampire": Try this: by (metis (full_types) foldri_cons_id iterate_to_list_correct iterate_to_list_def ni.nodes_list_
```

Query | Sledgehammer | State | Symbols | Timing

Teil XIX

Split-Regeln

case-expressions

Für jeden mit **datatype** erzeugten Typ *T*, wird auch eine Konstante *case_T* erzeugt, welche für *Pattern Matching* verwendet wird.

Beispiel

datatype *color = Red | Black*

datatype *'a rbt = Empty | Node color "'a rbt" 'a "'a rbt"*

liefert

case_color :: "'a ⇒ 'a ⇒ color ⇒ 'a"

case_rbt :: "'a ⇒ (color ⇒ 'b rbt ⇒ 'b ⇒ 'b rbt ⇒ 'a) ⇒ 'b rbt ⇒ 'a"

mit Syntax

case_color f g c ≡ **case** *c* **of** *Red ⇒ f | Black ⇒ g*

case_rbt f g t ≡ **case** *t* **of** *Empty ⇒ f | Node c l v r ⇒ g c l v r*

Simplifikation von `case`-expressions

Wie kann der Simplifier mit `case`-expressions umgehen?

Simplifikation von `case`-expressions

Wie kann der Simplifier mit `case`-expressions umgehen?

Lösung: Splitter

- Der *Splitter* ist Teil des Simplifiers.
- Wird aufgerufen, wenn Rewriting abgeschlossen.
- Wendet eine Split-Regel an (falls möglich).
- Startet Simplifikation auf dem/n neue/n Teilziel/en.

Split-Regel für `color`:

$$\texttt{color.split: P (}\textbf{case}\ \texttt{color}\ \textbf{of}\ \texttt{Red} \Rightarrow \texttt{f1} \mid \texttt{Black} \Rightarrow \texttt{f2}\texttt{)}$$
$$\longleftrightarrow\ \texttt{(color = Red} \longrightarrow \texttt{P f1)} \wedge \texttt{(color = Black} \longrightarrow \texttt{P f2)}$$

Split-Regeln

Karlsruher Institut für Technologie

Split-Regeln gibt es in zwei Varianten:

für Konklusion: `?P (f ?a ?b ?c)` $\longleftrightarrow$ `?Q ?a ?b ?c`

- Splitter unifiziert linke Seite mit Teiltermen der Konklusion aus dem aktuellen Ziel.
- Ersetze unifizierten Teilterm durch rechte Seite.

für Annahmen: `?P (f ?a ?b ?c)` $\longleftrightarrow$ $\neg$ `?Q ?a ?b ?c`

- Splitter unifiziert linke Seite mit Teiltermen der Annahmen aus dem aktuellen Ziel.
- Ersetze unifizierten Teilterm durch rechte Seite
- und löse einige logische Verknüpfungen auf:
  - Top-Level Disjunktionen in `?Q` werden zu Teilzielen
  - Konjunktionen in `?Q` werden zu einzelnen Annahmen (des jeweiligen Teilziels)
  - Negationen von `?P` in `?Q` werden „richtig rumgedreht“.

Split-Regeln – Beispiel

Split in Konklusion:

```
lemma fixes n :: nat
  shows "even (case c of Red ⇒ 2*n | Black ⇒ 4*n)"
by (simp split: color.split)
```

```
color.split: P (case color of Red ⇒ f1 | Black ⇒ f2)
  ⟷ (color = Red ⟶ P f1) ∧ (color = Black ⟶ P f2)
```

Split-Regeln – Beispiel

Split in Konklusion:

```
lemma fixes n :: nat
  shows "even (case c of Red ⇒ 2*n | Black ⇒ 4*n)"
by (simp split: color.split)
```

Split in Annahme:

```
lemma fixes n :: nat
  assumes "even (case c of Red ⇒ n | Black ⇒ m)"
  shows "even (n*m)"
by (simp split: color.split_asm)
```

```
color.split: P (case color of Red ⇒ f1 | Black ⇒ f2)
  ⟷ (color = Red ⟶ P f1) ∧ (color = Black ⟶ P f2)

color.split_asm: P (case color of Red ⇒ f1 | Black ⇒ f2)
  ⟷ ¬ (color = Red ∧ ¬ P f1 ∨ color = Black ∧ ¬ P f2)
```

Split-Regeln – Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie

Split in Konklusion:

```
lemma fixes n :: nat
  shows "even (case c of Red ⇒ 2*n | Black ⇒ 4*n)"
by (simp split: color.split)
```

Split in Annahme:

```
lemma fixes n :: nat
  assumes "even (case c of Red ⇒ n | Black ⇒ m)"
  shows "even (n*m)"
by (simp split: color.split_asm)
```

```
color.split: P (case color of Red ⇒ f1 | Black ⇒ f2)
  ⟷ (color = Red ⟶ P f1) ∧ (color = Black ⟶ P f2)

color.split_asm: P (case color of Red ⇒ f1 | Black ⇒ f2)
  ⟷ ¬ (color = Red ∧ ¬ P f1 ∨ color = Black ∧ ¬ P f2)

color.splits = color.split color.split_asm
```

Noch mehr Split-Regeln

Split-Regeln gibt es nicht nur für `case`-expressions eines Datentyps, sondern für beliebige Funktionssymbole.

Beispiel: *if*

```
split_if:
  P (if Q then x else y) ⟷ (Q ⟶ P x) ∧ (¬ Q ⟶ P y)
split_if_asm:
  P (if Q then x else y) ⟷ ¬ (Q ∧ ¬ P x ∨ ¬ Q ∧ ¬ P y)
```

Teil XX

Maps

Map

Map: partielle Abbildung, also rechte Seite undefiniert für manche linke Seite

Typen inklusive Undefiniertheit in Isabelle: `'a option`

datatype `'a option = None | Some 'a`

- enthält alle Werte in `'a` mit `Some` vornangesetzt
- spezieller Wert `None` für Undefiniertheit

Beispiel: `bool option` besitzt die Elemente `None`, `Some True` und `Some False`

Map

also Maps in Isabelle von Typ `'a` nach `'b` haben Typ `'a ⇒ 'b option`
oder kurz `'a ⇀ 'b` (⇀ ist `\<rightharpoonup>`, Kürzel `.>`)

- leere Map (also überall undefiniert): `empty`
- Update der Map `M`, so dass `x` auf `y` zeigt: `M(x ↦ y)` (↦: `|- >`)
- Wert von `x` in Map `M` auf undefiniert setzen: `M(x := None)`
  (Hinweis: `M(x ↦ y)` entspricht `M(x := Some y)`)
- `x` hat in Map `M` Wert `y`, wenn gilt: `M x = Some y`
- `x` ist in Map `M` undefiniert, wenn gilt: `M x = None`
- um Map eigenen Typnamen zu geben: **type_synonym**
  Beispiel: **type_synonym** `nenv = nat ⇀ bool`

Falls mehr Infos zu Maps nötig: *Isabelle-Verzeichnis*/src/HOL/Map.thy