Elementare Verbandstheorie

Halbordnungen

Definition

Eine binäre Relation $\leq$ auf einer Menge M heisst *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Es gilt also:

$$\begin{array}{ll} \forall x \in M: & x \leq x \\ \forall x, y, z \in M: & x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z \\ \forall x, y \in M: & x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y \end{array}$$

Schreibweise:

$$\begin{aligned} x < y &\iff x \leq y \wedge x \neq y \\ x \geq y &\iff y \leq x \end{aligned}$$

Beispiele

- Beispiel 1:

$$(M, \leq) \text{ mit } M = \{a, b, c, d, o, u\}$$

$$u < c, u < d, c < a, c < b, d < a, d < b, a < o, b < o$$

- Beispiel 2: Potenzmenge

$$(\mathcal{P}(M), \subseteq)$$

- Beispiel 3:

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

Hasse-Diagramme

- Hasse-Diagramme sind graphische Darstellungen von Halbordnungen:
- eine Aufwärts-Kante $x \rightarrow y$ bedeutet $x < y$, wegen Transitivität impliziert ein Aufwärts-Pfad $x \rightarrow^* y$ ebenso $x \leq y$
- Halbordnungen sind stets (Aufwärts)-zyklenfrei wegen Antisymmetrie, deshalb kann man die Pfeile an den Kanten weglassen.

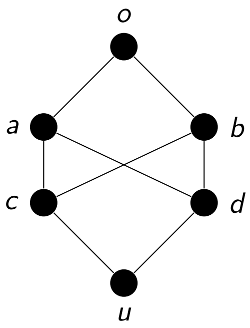


Abbildung: Beispiel 1

Schranken

- Eine Halbordnung heisst *total*, wenn alle Elemente vergleichbar sind:

$$\forall x, y \in M : x \leq y \vee y \leq x$$

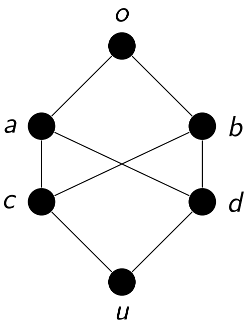
- z heisst *obere Schranke* zu x, y, wenn $x \leq z \wedge y \leq z$
- z heisst kleinste obere Schranke oder *Supremum*, wenn jede andere obere Schranke größer ist:

$$\forall o \in M : x \leq o \wedge y \leq o \implies z \leq o$$

- z heisst *untere Schranke*, wenn $z \leq x \wedge z \leq y$
- z heisst größte untere Schranke oder *Infimum*, wenn jede andere kleiner ist:

$$\forall o \in M : o \leq x \wedge o \leq y \implies o \leq z$$

Schranken



In Beispiel 1:

- a und b sind obere Schranken zu c, d jedoch keine kleinste obere Schranke, da a, b unvergleichbar sind!
- Obere bzw. untere Schranken muss es nicht immer geben! Bsp: entferne o
- Wenn es eine größte untere Schranke bzw kleinste obere Schranke gibt so sind diese eindeutig (wieso?).
- Schreibweise: $x \sqcup y$ (Supremum), $x \sqcap y$ (Infimum).

Verbände

Definition

Eine Halbordnung $(M, \leq)$ heisst *Verband*, wenn für je zwei Elemente $x, y \in M$ stets $x \sqcup y$ und $x \sqcap y$ existieren. Ferner gibt es ein kleinstes Element $\bot = \bigsqcap M$ und größtes Element $\top = \bigsqcup M$.

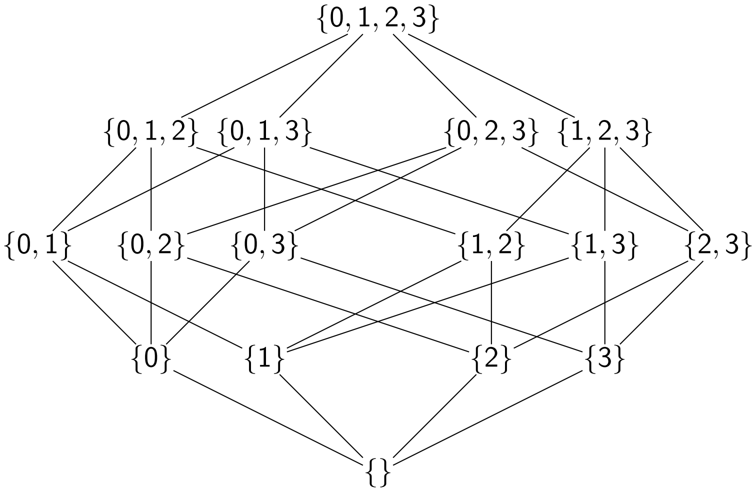
Bemerkung: $\bigsqcup M = \bigsqcup\limits_{x \in M} x$

In Verbänden gilt $x \leq y \iff x \sqcup y = y \iff x \sqcap y = x$.
Um die Gleichheit zweier Elemente $x = y$ zu zeigen, wird zumeist $x \leq y$ und $x \geq y$ gezeigt (es sei denn, man kommt mit rein algebraischen Umformungen aus)

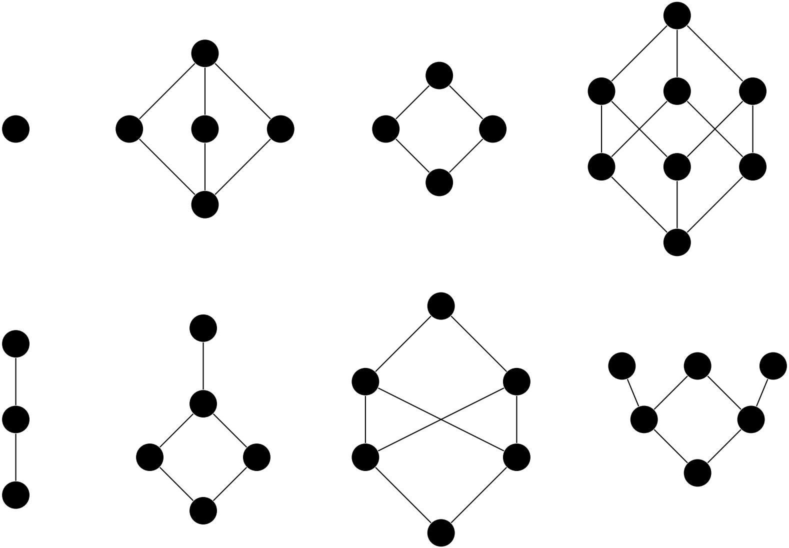
Verbände

- Beispiel 1 ist kein Verband, da a, b, kein Infimum und c, d kein Supremum haben.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist Verband mit $\sqcap = \cap, \sqcup = \cup$
- weiteres Beispiel: Begriffsverbände ($\rightsquigarrow$ Vorlesung FOO)
- Häufig in Beweisen angewandte Eigenschaft: $x \leq z \wedge y \leq z \implies x \sqcup y \leq z$. Analog für $x \sqcap y$.

Beispiel Potenzmengenverband $P(\{0, 1, 2, 3\})$ mit $\subseteq$



Weitere Beispiele: Verband oder Halbordnung?



Rechenregeln

- $x \sqcup x = x$
- $x \sqcup y = y \sqcup x$
- $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$
- $x \sqcap x = x$
- $x \sqcap y = y \sqcap x$
- $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

Diese Regeln muss man beweisen, und zwar mit den o.g. Tricks (Übung!)
In distributiven Verbänden gilt

- $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$
- $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Definitionen

- Ist $(M; \leq, \sqcap, \sqcup, \top, \bot)$ ein Verband, so ist $(M; \geq, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ der *duale* (auf den Kopf gestellte) Verband
- Ein Verband $(M; \leq, \sqcap, \sqcup, \top, \bot)$ heisst *vollständig*, wenn für beliebige $X \subseteq M$ sowohl $\bigsqcap X$ als auch $\bigsqcup X$ existieren.
- Endliche Verbände sind automatisch vollständig.
- Ein Verband hat endliche Höhe, wenn jeder aufsteigende Pfad $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots$ endlich ist.

Beispiel: Für eine beliebige Menge M betrachte

$$(M \cup \{\top, \bot\}, \leq) \text{ wobei } x \leq y \iff x = \bot \vee y = \top \vee x = y$$

Kombinieren von Verbänden

Seien $V_1, .., V_n$ Verbände

Kombination als Produkt

$$V_1 \times ... \times V_n \quad = \quad \{(x_1, .., x_n) \mid x_i \in V_i\}$$

- $\sqcup$, $\sqcap$ komponentenweise
- Höhe$(V_1 \times ... \times V_n) =$ Höhe$(V_1) + .. +$ Höhe(V_n)

Kombination als Summe

$$V_1 + ... + V_n \quad = \quad \{(i, x_i) \mid x_i \in V_i \setminus \{\top, \bot\}\} \cup \{\top, \bot\}$$

- $(i, x) \sqsubseteq (j, y) \iff i = j \wedge x \sqsubseteq y$
- Höhe$(V_1 + ... + V_n) = max($Höhe(V_1), .. , Höhe$(V_n))$

Fixpunkte

Eine Funktion $f : M \to M$ heisst monoton, wenn

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Satz

In einem Verband endlicher Höhe M hat jede monotone Funktion f einen kleinsten *Fixpunkt*, und es existiert $k \in \mathbb{N}_0$ mit $f^k(\bot) = f^{k+1}(\bot)$ und

$$\mathit{fix}(f) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot) = f^k(\bot)$$

Beweis Fixpunktsatz

- Es ist $\perp \leq f(\perp)$, wegen Monotonie auch $f(\perp) \leq f(f(\perp))$. Mit Induktion folgt:

$$\perp \leq f(\perp) \leq f^2(\perp) \leq \ldots \leq f^i(\perp) \leq f^{i+1}(\perp) \leq \ldots \leq \top$$

- Verband endlicher Höhe $\Rightarrow$ $f^i(\perp)$ nach Schubfachprinzip nicht alle verschieden.

Beweis Fixpunktsatz

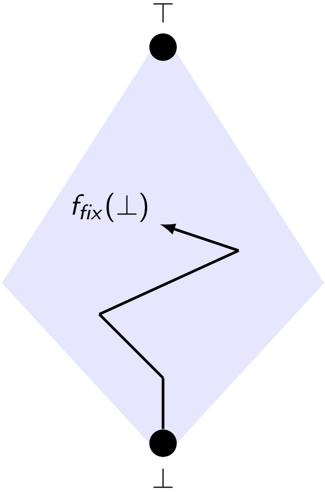
- Daher gibt es k, j mit $f^k(\perp) = f^{k+j}(\perp)$, sogar $f^k(\perp) = f^{k+1}(\perp) = f(f^k(\perp))$, da alle Elemente auf dem Pfad von k bis $k+j$ gleich.

  $\Rightarrow f^k(\perp)$ ist Fixpunkt von f.
- Angenommen $f(z) = z$, also z weiterer Fixpunkt. Dann ist

$$
\begin{array}{lll}
\perp & & \leq z \\
f(\perp) & \leq f(z) & = z \\
f(f(\perp)) & \leq f(z) & = z \\
 & \vdots & \\
f^i(\perp) & & \leq z \\
\Longrightarrow \; f^k(\perp) & & \leq z
\end{array}
$$

$\Rightarrow f^k(\perp)$ ist kleinster Fixpunkt von f.

Fixpunktberechnung



Komplexität hängt von 3 Faktoren ab:

- Höhe des Verbandes $\longrightarrow$ Obere Schranke $\#$*Iterationen*
- Kosten der Berechnung der Funktionswerte von f
- Kosten des Vergleichs auf Gleichheit $f^k(\perp) = f^{k+1}(\perp)$

Anwendung: Lösen von Gleichungssystemen

Sei V ein Verband endlicher Höhe, x_i Variablen und $f_i : V^n \to V$ monotone Funktionen. Gesucht: Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, .., x_n) \\ &\ldots \\ x_n &= f_n(x_1, .., x_n) \end{aligned}$$

Gleichungssysteme dieser Art haben eine eindeutige kleinste Lösung

Berechenbar als Fixpunkt der Funktion $F : V^n \to V^n$

$$\begin{aligned} F(x_1, .., x_n) &= (f_1(x_1, .., x_n), .., f_n(x_1, .., x_n)) \\ &= (x_1, .., x_n) \end{aligned}$$

Fixpunkt Algorithmen

Beispiel: Kontrollflussgraph

Seien die Knoten des CFG $N = \{v_1, .., v_n\}$ und der Verband V^n
$[\![]\!] : N \to V^n$ weist CFG-Knoten ein Verbandselement zu
Je Knoten v_i eine Datenflussgleichung: $[\![v_i]\!] = f_i([\![v_1]\!], .., [\![v_n]\!])$

Es gilt den Fixpunkt folgender Funktion zu bestimmen ($x_i = [\![v_i]\!]$):

$$F(x_1, .., x_n) \quad = \quad (f_1(x_1, .., x_n), .., f_n(x_1, .., x_n))$$

Naiver Ansatz

x = (⊥, .. , ⊥);
do {
    t = x;
    x = F(x);
} **while** (x ≠ t);

Chaotic Iteration

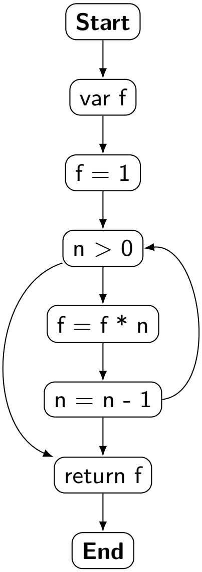
$x_1 = \bot$; .. $x_n = \bot$;
do {
    $t_1 = x_1$; .. $t_n = x_n$;
    $x_1 = f_1(x_1, .. , x_n)$;
    ...
    $x_n = f_n(x_1, .. , x_n)$;
} **while** ($x_1 \neq t_1 \vee ... \vee x_n \neq t_n$);

Fixpunkt Algorithmen

Naiver Ansatz und *Chaotic Iteration* berechnen alle Knoten in jeder Iteration $\rightarrow$ Geht es besser?

Worklist Algorithmus

$x_1 = \bot$; .. $x_n = \bot$;
q $= [v_1, .., v_n]$;
while $(q \neq [])$ {
    assume q $= [v_i, ..]$;
    y $= f_i(x_1, .. , x_n)$;
    q = q.`tail`();
    if $(y \neq x_i)$ {
        for $(v \in dep(v_i))$ { q.append(v);}
        x_i = y;
    }
}



Galois-Verbindungen

wichtig für Theorie der Programmanalyse

$(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ seien Halbordnungen, $\alpha : P \to Q$, $\gamma : Q \to P$ Funktionen

(α, γ) heisst Galois-Verbindung, wenn

$$1. \quad x \leq y \implies \alpha(x) \geq \alpha(y)$$

$$2. \quad u \leq v \implies \gamma(u) \geq \gamma(v)$$

$$3. \quad x \leq \gamma(\alpha(x)) \text{ und } u \leq \alpha(\gamma(u))$$

α und γ sind also beide antimonoton. P und Q sind oft Potenzmengenverbände oder Verbände endlicher Höhe (s.o.)

Galois-Verbindungen

Lemma. (α, γ) sind Galois-Verbindung genau dann wenn

$$4. \quad x \leq \gamma(u) \iff u \leq \alpha(x)$$

Beweis. "$\Longrightarrow$": a. Sei $x \leq \gamma(u)$. Dann ist nach 1. und 3. $\alpha(x) \geq \alpha(\gamma(u)) \geq u$. b. analog
"$\Longleftarrow$": Es ist $\alpha(x) \leq \alpha(x)$ und nach 4. $x \leq \gamma(\alpha(x))$, also 3a. 3b analog. Sei nun $x \leq y$. Da $y \leq \gamma(\alpha(y))$, ist $x \leq \gamma(\alpha(y))$ und nach 4. $\alpha(y) \leq \alpha(x)$, also 1. 2. analog.

Lemma.

$$\alpha(x) = \alpha(\gamma(\alpha(x))) \text{ und } \gamma(u) = \gamma(\alpha(\gamma(u)))$$

Beweis. "$\leq$": Sei $v = \alpha(x)$. Dann ist nach 3b. $v \leq \alpha(\gamma(v))$.
"$\geq$": Es ist $x \leq \gamma(\alpha(x))$ und mit 1. $\alpha(x) \geq \alpha(\gamma(\alpha(x))$. Teil b analog.

Korollar. $\alpha \circ \gamma$ ist ein Hüllenoperator, also $x \leq \alpha(\gamma(x))$, $\alpha(\gamma(x)) = \alpha(\gamma(\alpha(\gamma(x))))$, und $x \leq y \implies \alpha(\gamma(x)) \leq \alpha(\gamma(y))$.
$\gamma \circ \alpha$ ist auch ein Hüllenoperator.

Begriffsverbände

Mathematische Begriffsanalyse (Ganter & Wille):

- analysiert Relation zwischen "Objekten" und "Attributen"
- visualisiert versteckte Struktur in dieser Relation
- transformiert Relation in einen Begriffsverband

$\Rightarrow$ hierarchische Gruppierung von Objekten und Attributen

$\Rightarrow$ Abhängigkeiten, Interferenzen, Zerlegbarkeiten

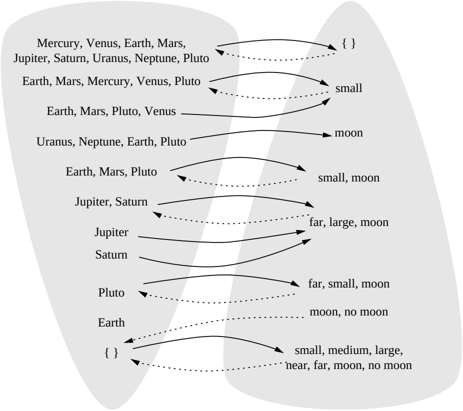
Beispiel

Relation zwischen Planten und Eigenschaften:

	small	medium	large	near	far	moon	no moon
Mercury	×			×			×
Venus	×			×			×
Earth	×			×		×	
Mars	×			×		×	
Jupiter			×		×	×	
Saturn			×		×	×	
Uranus		×			×	×	
Neptune		×			×	×	
Pluto	×				×	×	

Beispiel/2

Gemeinsame Attribute / Gemeinsame Objekte:

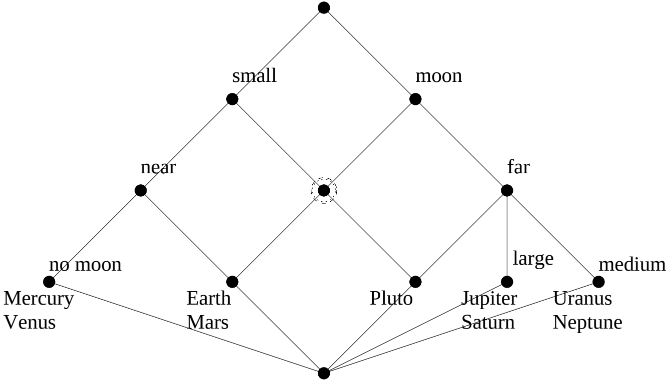


Dies ist eine Galoisverbindung!

$\alpha : 2^{\mathsf{Pla}} \rightarrow 2^{\mathsf{Eig}}$, $\gamma : 2^{\mathsf{Eig}} \rightarrow 2^{\mathsf{Pla}}$

Begriffsverband

maximale Rechtecke in der Tabelle werden zu Verbandselementen (Zeilen-/Spaltenpermutationen irrelevant)



Eigenschaften des Verbandes

- Transformation der Originaltabelle: $\nu(o)$ ist das mit o markierte Verbandselement, $\mu(a)$ das mit a markierte

$$(o, a) \in T \iff \nu(o) \leq \mu(a)$$

- Suprema faktorisieren gemeinsame Eigenschaften heraus: *"Mars und Venus sind beide nah"*
- Infima faktorisieren gemeinsame Objekte heraus: *"Pluto ist sowohl klein als auch weit"*
- Aufwärtskanten sind Implikationen: *"Planeten ohne Mond sind auch nah und klein"*