Wir zeigen nun als nächstes ein sehr allgemeines Unentscheidbarkeitsresultat, das besagt, daß es hoffnungslos ist, einer Turingmaschine irgendeinen Aspekt ihres funktionalen Verhaltens algorithmisch bestimmen zu wollen.

Satz. (RICE)
SEI $\mathcal{R}$ DIE KLASSE ALLER TURING-BERECHENBAREN FUNKTIONEN. SEI $\mathcal{S}$ EINE *beliebige* TEILMENGE HIERVON (MIT AUSNAHME VON $\mathcal{S} = \emptyset$ UND $\mathcal{S} = \mathcal{R}$). DANN IST DIE SPRACHE

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{DIE VON } M_w \text{ BERECHNETE FUNKTION LIEGT IN } \mathcal{S}\}$$

UNENTSCHEIDBAR.

Beweis: Sei $\Omega \in \mathcal{R}$ die überall undefinierte Funktion. Es ist entweder Ω in $\mathcal{S}$ oder nicht.

Fall 1: $\Omega \in \mathcal{S}$.

Da $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, gibt es eine Funktion $q \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$. Sei Q eine Turingmaschine, die q berechnet.

Jedem Wort $w \in \{0,1\}^*$ ordnen wir nun ein Turingmaschine M zu, die wir verbal wie folgt beschreiben.

> Angesetzt auf eine Eingabe y ignoriert M diese zunächst und verhält sich wie M_w angesetzt auf leerem Band. Falls diese Rechnung zu Ende kommt, so verhält sich M danach wie Q angesetzt auf y.

Für die von dieser Turingmaschine M berechnete Funktion g gilt nun:

$$g = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } M_w \text{ auf leerem Band nicht stoppt} \\ q, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung f, die w die Codierung von M zuordnet, ist total und berechenbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ auf leerem Band stoppt} \\ &\Longrightarrow M \text{ berechnet die Funktion } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt nicht in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ auf leerem Band stoppt nicht} \\ &\Longrightarrow M \text{ berechnet die Funktion } \Omega \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die Funktion f vermittelt eine Reduktion von $\overline{H_0}$ nach $C(\mathcal{S})$. Da H_0 unentscheidbar ist, ist es auch $\overline{H_0}$, und damit auch $C(\mathcal{S})$.

Fall 2: $\Omega \notin \mathcal{S}$.

In diesem Fall zeigt man analog $H_0 \leq C(\mathcal{S})$. ■

Beispiel: Es folgt beispielsweise aus dem Satz von Rice, daß es nicht möglich ist, einer Turingmaschine anzusehen, ob sie eine konstante Funktion berechnet. Man wähle

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{R} \mid f \text{ ist eine konstante Funktion}\}.$$

Dann ist

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine konstante Funktion}\}$$

unentscheidbar.